Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
Fysiska institutionen
C-A Sjöblom

December 1977
10 sidor

M4

REVERSIONSPENDELN

MÅLSÄTTNING
Att precisionsbestämma tyngdaccelerationen i Göteborg med hjälp av en reversionspendel.

FÖRBEREDELSER
Du skall ha läst igenom lab-PM ordentligt och kunna svara på instuderingsfrågorna.

Namn.. Kurs..

Utförd den...................................... Handledare..

Godkänd den.................................... av...

GÖTEBORGS UNIVERSITET
Fysiska institutionen
C-A Sjöblom, cas

M 4

december 1977

REVERSIONSPENDELN M4

Uppgift: Att precisionsbestämma tyngdaccelerationen i Göteborg med hjälp av en reversionspendel.

Teori: För bestämning av tyngdaccelerationen, g, använder man en pendel enligt figur 1:

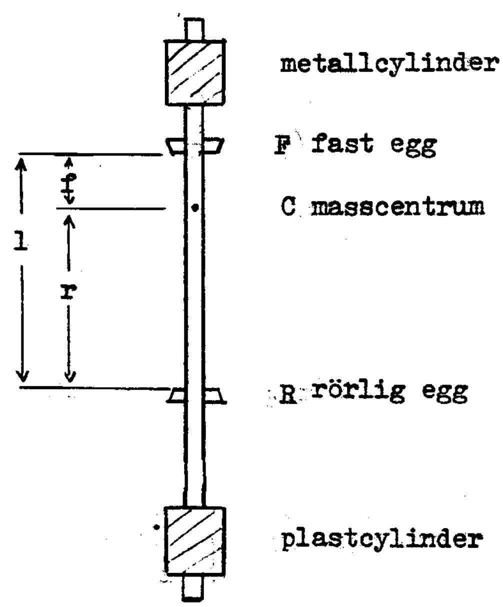


Fig. 1. Reversionspendel

Reversionspendeln består av en c:a 1,2 m lång metallstav. I stavens ena ände är en metallcylinder fästad och i stavens andra ände en lika stor plastcylinder för att luftmotståndet skall vara ungefär lika stort oberoende av kring vilken egg som pendeln svänger. På grund av cylindrarnas olika densiteter kommer masscentrum C att ligga avsevärt närmare metallcylindern än plastcylindern, vilket kommer att ha betydelse vid utvärderingen av experimentet. Mellan cylindrarna finns två eggar som skall användas som svängningsaxlar för pendeln. Den ena eggen (F) fixeras intill metallcylindern, medan den andra eggen (R) flyttas mellan de olika mätningarna.

Enligt elementär svängningsteori kan svängningstiden för små svängningar (utslagsvinkeln mindre än c:a 5^{o}) kring en axel genom F beräknas med formeln

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{I_F}{mgf}} \qquad \ldots (1)$$

där

I_F = pendelns tröghetsmoment m.a.p. en axel genom F
g = tyngdaccelerationen
m = pendelns massa
f = avståndet mellan masscentrum C och fasta eggen F (se Fig. 1)

Det är ganska lätt att visa, att om avståndet l mellan fasta eggen F och rörliga eggen R är lika med $I_F/(mf)$, så är svängningstiden T_R för svängningar kring rörliga eggen R lika med T_F:
Analogt med formeln (1) ovan gäller nämligen

$$\frac{T_R^2 mg}{4\pi^2} = \frac{I_R}{r} = \text{(Steiners sats)} \ \frac{I_C + mr^2}{r} = \frac{I_F - mf^2 + mr^2}{r} =$$

$$= \frac{I_F + m(r^2 - f^2)}{r} = \frac{I_F + m(r + f)(r - f)}{r} =$$

$$= \frac{I_F + ml(r - f)}{r} = \frac{1}{r}\left(I_F + m\,\frac{I_F}{mf}(r - f)\right) =$$

$$= \frac{I_F}{r}\left(1 + \frac{r}{f} - 1\right) = \frac{I_F}{f}$$

dvs

$$T_R = 2\pi\sqrt{\frac{I_F}{mgf}} = T_F$$

Av pendelns symmetri framgår dessutom att $\frac{I_F}{mf} = \frac{I_R}{mr}$ då R har detta läge!

Reversionspendeln har alltså samma svängningstid för svängningar kring F som en matematisk pendel med pendellängden.

$$l_e = \frac{I_F}{mf} \qquad \ldots (2)$$

Sträckan l_e kallas pendelns ekvivalenta pendellängd. Man kan alltså med hjälp av formeln för svängningstiden hos en matematisk pendel beräkna tyngdaccelerationen g:

$$g = \frac{4\pi^2 l_e}{T_F^2} \qquad \ldots (3)$$

om man förskjuter den rörliga eggen R längs pendeln tills svängningstiderna T_F och T_R är lika och mäter avståndet $l = l_e$ mellan F och R.

Det visar sig dock i praktiken svårt att bestämma l_e (dvs det läge av R som gör $T_R = T_F$) med tillräcklig noggrannhet. Nedanstående teori visar dock, att man kan nöja sig med ett läge av R som endast gör svängningstiderna T_F och T_R approximativt lika:

Enligt Steiners sats och ekvation (1) gäller

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + mf^2}{mgf}} \quad \text{dvs} \quad \frac{gfT_F^2}{4\pi^2} = f^2 + \frac{I_C}{m} \qquad \ldots (4)$$

$$T_R = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + mr^2}{mgr}} \quad \text{dvs} \quad \frac{grT_R^2}{4\pi^2} = r^2 + \frac{I_C}{m} \qquad \ldots (5)$$

Subtraktion av ekvation (5) från ekvation (4) ger

$$\frac{g}{4\pi^2}(fT_F^2 - rT_R^2) = f^2 - r^2$$

som kan skrivas

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_F^2 f - T_R^2 r}{f^2 - r^2} = \frac{T_F^2 + T_R^2}{2(f + r)} + \frac{T_F^2 - T_R^2}{2(f - r)}$$

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_F^2 + T_R^2}{2(f + r)} + \frac{T_F^2 - T_R^2}{2(f - r)} \quad . . . (6)$$

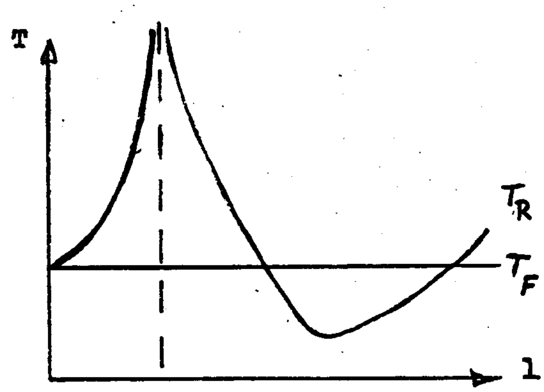
kan alltså användas för att beräkna ett noggrannt värde på tyngdaccelerationen g ur f, r, T_F och T_R.

På grund av att metallcylinderns massa är mycket större än plastcylinderns kommer masscentrum att vara avsevärt förskjutet mot den fasta eggen F, dvs faktorn $(f - r)$ i andra termen i ekvation (6) ovan är stor (c:a 0,45m). Om avståndet mellan eggarna $l = (f + r)$ ligger inom c:a 1 cm från ekvivalenta pendellängden l_e kommer däremot T_R att vara mycket nära T_F, vilket gör andra termen i ekvation (6) mycket mindre än första termen. Noggrannheten i bestämningen av $(f - r)$ dvs av läget av masscentrum C behöver alltså inte vara särskilt stor.

UTFÖRANDE:

1. Approximativ bestämmning av ekvivalenta pendellängden

Förskjut den rörliga eggen R i steg om 5 cm och bestäm tiden för 10 svängningar,dels kring den fasta och dels kring den rörliga eggen. Svängningstiderna kommer att variera som figur 2 visar.



Figur 2: Svängningstidens (T) beroende av eggavståndet (l). Masscentrum beläget närmast den fasta eggen. T_F varierar något med l pga att den rörliga eggens massa ej är försumbar (påverkar dock inte mätnoggrannheten).

Den skärningspunkt mellan kurvorna som svarar mot det största l-värdet ger de l_e som är lämpligast att använda för de fortsatta mätningarna (jämför ekvation (6)!). Avläs detta l_e-värde. Placera sedan den rörliga eggen R så att eggavståndet l är ett helt antal mm i närheten av l_e (det viktigaste är att det inställda l är noggrannt bestämt). Observera att l mätes från plastbiten vid respektive egg.

2. Första bestämning av tyngdaccelerationen g

Mät svängningstiden för 20 svängningar kring fasta eggen F och rörliga eggen R (R skall vara placerad enligt experiment 1 ovan). Bestäm masscentrum C:s läge genom att balansera pendeln på en linjal (finns vid labbplatsen). Beräkna ett första värde på g med hjälp av formeln (6).

3. Planering av de fortsatta mätningarna för att uppnå önskad mätnoggrannhet.

Maximalfelsberäkning används i laborationskursen oftast för att uppskatta felet i de beräknade storheterna. En minst lika viktig tillämpning är att bedöma den arbetsinsats i mätserier som erfordras för att en viss grad av mätnoggrannhet skall kunna uppnås.

Som framgått av den föregående teorin beräknas tyngdaccelerationen g med formeln (6):

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_F^2 + T_R^2}{2(f+r)} + \frac{T_F^2 - T_R^2}{2(f-r)} = A + B$$

Av formeln framgår att relativa felet i g, $\Delta g/g$, maximalt bör vara

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A + B} \leq \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{B}{A + B} =$$

$$= \underbrace{\frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta l}{l}}_{\Delta A/A} + \underbrace{\left[\frac{2T_F\Delta T_F - 2T_R\Delta T_R}{T_F^2 - T_R^2} - \frac{\Delta f - \Delta r}{f - r}\right]}_{\Delta B/B} \cdot \underbrace{\frac{\dfrac{T_F^2 - T_R^2}{2(f-r)}}{\dfrac{T_F^2 + T_R^2}{2(f+r)} + \dfrac{T_F^2 - T_R^2}{2(f-r)}}}_{B/(A+B)} \leq$$

$$\leq \frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta l}{l} + \left[\frac{4T|\Delta T|}{T_F^2 - T_R^2} + \frac{2|\Delta f|}{f - r}\right] \frac{f + r}{f - r} \frac{T_F^2 - T_R^2}{T_F^2 + T_R^2} \approx$$

$$\approx \frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2|\Delta T|}{T}\frac{f + r}{f - r} + \underbrace{\frac{2|\Delta f|(f + r)(T_F^2 - T_R^2)}{(f - r)^2 (T_F^2 + T_R^2)}}_{\text{försummas då } T_F^2 - T_R^2 \text{ liten!}}$$

$$\therefore \left|\frac{\Delta g}{g}\right| = \frac{|\Delta T|}{T}\left[2 + 2\left|\frac{f + r}{f - r}\right|\right] + \frac{|\Delta l|}{l}$$

Uppskatta felet i tidmätningen genom att mäta tiden för 1 svängning 10 ggr, samt felet i l. Beräkna storleksordningen hos de olika termerna i ekvationen för relativa felet i tyngdaccelerationen. Man finner att felet i g domineras av felet i tidmätningen. Bestäm alltså på grundval av dessa beräkningar hur långa tidmätningar (dvs hur många svängningar) som måste göras för att felet i g skall vara mindre än en enhet i tredje siffran.

4. Slutbestämming av tyngdaccelerationen i Göteborg.

Bestäm svängningstiderna kring den fasta eggen F och den rörliga eggen R för det antal svängningar som enligt beräkningarna under (3) skall ge ett fel i tyngdaccelerationen som är mindre än 1/1000 (ta till ordentligt!)

Kontrollera slutligen om Du har lyckats i denna föresats genom att jämföra med det värde på g som man kan beräkna med kännedom om latituden φ:

$$g = 9{,}78049(1 + 0{,}0052884 \sin^2\varphi - 0{,}0000059 \sin^2 2\varphi) \ \mathrm{m/s^2} \qquad \ldots (7)$$

GÖTEBORGS UNIVERSITET
Fysiska institutionen
Björn Graneli/BE

1978-12-27

ARBETSBLAD TILL REVERSIONSPENDELN M4.

1. Mätning av pendelns svängningstid.

Börja med att tänka ut hur man måste knäppa av klockan för att mäta ett helt antal perioder.

Öva sedan att knäppa av tiden så exakt som möjligt. (Lyssna till pendelns svängningstakt.)

Gör en uppskattning av maximala felet i tidsmätningen genom att mäta sväng-ninggtiden för en period (N = 1) för svängningar kring ena eggen vid 10 på varandra följande mätningar.

Tabell 2.

Mätning nr	T (s)	Mätning nr	T (s)
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Dessa mätningar ger T = $\pm \underbrace{\qquad\qquad}_{\Delta T}$ (maximala felet)

2. Approximativ bestämning av ekvivalenta pendellängden l_e.

Den fasta eggen (index F) är fixerad intill metallcylindern. Variera egg-avståndet genom att flytta den rörliga eggen (index R).

Mät för varje inställning tiden för 10 svängningar kring vardera eggen. Flytta eggen R exempelvis 5 cm mellan varje mätning, och utnyttja därvid de fasta markeringarna. Rita in mätpunkterna för svängningstiderna runt båda eggarna i ett diagram. (Jmfr Fig. 2, sid 4 i handl.) Gör en kompletterande mätning för en punkt mellan de båda 5 cm-markeringar som ligger närmast skärnings-punkten för de båda mätserierna.

Rita sedan motsvarande grafer och bestäm skärningspunkten.

$10T_F$ (s)	$10T_R$ (s)

Grafen visar att ekvivalenta pendellängden, l_e är c:a ______ mm.

Fixera rörliga eggen R så att l får detta värde (NOGGRANT!)

3. Första bestämning av tyngdaccelerationen g.

$20\ T_F$ = (s), T_F = (s)

$20\ T_R$ = (s), T_R = (s)

l = (m) (inställt värde)

f = (m) (Masscentrums läge bestäms genom att låta pendeln balansera på en linjal)

r = (m)

$\frac{4\pi^2}{g}$ = (Ekvation 6)

g = ______________ m/s^2

Utnyttja uttrycket för $\frac{\Delta g}{g}$ för att uppskatta relativa felet i denna mätning:

$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| =$

4. Slutbestämning av tyngdaccelerationen i Göteborg.

Man erhåller för det relativa felet för N svängningar, analogt med handledningen sid. 5.

$$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| = \frac{|\Delta T|}{NT}\left[2 + 2\left|\frac{f + r}{f - r}\right|\right] + \frac{|\Delta l|}{l}$$

$N\,T_F =$ (s) $T_F =$ (s)

$N\,T_R =$ (s), $T_R =$ (s)

$l =$ (m) mätes med katetometer

$f =$ (m)

$r =$ (m)

I denna noggranna mätning är det nödvändigt att korrigera T för utslagsvinkeln:

$T_{korr} = T_{obs}\left(1 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{16}\right)$ α_1 och α_2 är utslagsvinklarna (i radianer) i början och slutet av svängningstidsmätningen.

$\alpha_{1,F} =$ (rad)

$\alpha_{2,F} =$ (rad)

$\alpha_{1,R} =$ (rad)

$\alpha_{2,R} =$ (rad)

Därmed fås

$T_{F,korr} =$ (s)

$T_{R,korr} =$ (s)

Insättning i formel (6) ger

$\frac{4\pi^2}{g} =$

dvs

$g =$ m/s^2

vilket skall jämföras med det ur formel (7) och Göteborgs latitud $57,7^o$ beräknade $g =$ m/s^2.

RESULTAT: Tyngdaccelerationen i Göteborg har experimentellt bestämts vara m/s

GÖTEBORGS UNIVERSITET
Fysiska institutionen
Carl-Axel Sjöblom

1983-01-18

Instuderingsfrågor till laboration:

M4 REVERSIONSPENDELN

1. Beskriv en reversionspendel i stora drag.
2. Vad är en fysisk pendels ekvivalenta pendellängd?
3. Hur beräknas ekvivalenta pendellängden?
4. Redogör för de olika stegen vid bestämmningen av tyngdaccelerationen.
5. Vilket experimentella fel kommer att bidra mest till felet i det uppmätta g?
6. Redogör för begreppet tyngdacceleration.
7. Vad har plastcylindern på pendeln för betydelse?
8. Vilket avstånd på pendeln måste mätas med mycket stor noggrannhet?
9. Varför använder man inte ekvivalenta pendellängden för att beräkna tyngdaccelerationen? Vad gör man istället?
10. I figur 2 på sidan 4 av handledningen anges hur T(R) varierar med läget hos R.

    a) I ett läge är T(R) oändligt stor. Varför?
    b) Vilket av de två eggavstånden där T(R)=T(F) svarar mot ekvivalenta pendellängden?

11. Varför varierar tyngdaccelerationen med latituden?