

LABORATION **T3** FÜR F3
VÄRMETRANSPORT

Handledare:

Namn: Nr: Labplats:

Laborationen utförd den

Laborationen inlämnad den

Godkänd den

av

Avsikten med den här laborationen är att studera värmetransportegenskaper hos några valda fasta och flytande material som är av stor praktisk betydelse i olika energitekniska sammanhang.

1. ALLMÄNT OM VÄRMETRANSPORT.

Temperaturutjämning sker genom att värme överföres från varmare ställen till kallare. Värmeöverföring kan ske på tre olika sätt:

Ledning

Strålning

Konvektion

Här kommer vi att ägna oss åt studier av värmetransport via värmeledning. Värmestrålning studeras vid ett annat laborationstillfälle (laborationen T6). Konvektionsbidraget, som oftast är dominerande i vätskor och gaser, kommer vi att undvika genom att avbryta mätproceduren innan konvektionen hinner sätta igång.

Värmeledning fordrar ett medium för att värmeenergin skall kunna överföras från ett ställe till ett annat, men någon transport av material sker ej. I en fast kropp sker värmeledningen i huvudsak medelst två mekanismer, gittersvängningar och elektronernas rörelse.

Den kvantitativa behandlingen av värmesvängningarna i ett gitter är komplicerad då man måste ta hänsyn till att svängningarna är kvantiserade. En svängning med frekvensen ν kan endast anta diskreta energibelopp $h\nu$, där h är Plancks konstant. I analogi med ljusets fotoner kallar man gittrets mekaniska svängningskvanta för fononer. Fononerna betraktas som partiklar i gittret, de kolliderar med andra fononer och gittrets atomer och, om det är en metall, även med ledningselektronerna. Vid kollisionerna sker spridning av dem. Man kan beräkna en fri medelväglängd för dem, dvs hur långt de i medeltal går mellan två kollisioner. Ju större deras fria medelväglängd är ju bättre leder materialet värme.

I metaller sker värmeledningen till största delen genom de fria elektronerna i ledningsbandet, dvs ledningselektronerna. Samma mekanism är ansvarig för metallens elektriska ledningsförmåga, varför värmeledningsförmågan och elektriska ledningsförmågan följs åt.

För temperaturer över 100 K är värmeledningen medelst fria elektroner i storleksordningen 100 gånger effektivare än värmeledningen medelst gittersvängningarna, dvs fononerna. I en isolator, där man sak-

nar fria elektroner, sker värmeledningen helt genom fononer, varför isolatorn är en dålig värmeledare. Halvledare intar en mellanställning med starkt temperaturberoende egenskaper.

För en kvantitativ beskrivning av värmetransportegenskaperna hos olika ämnen introduceras i termodynamiken två makroskopiska materialparametrar: värmekonduktiviteten (värmeledningsförmågan) och värmediffusiviteten (temperaturledningsförmågan).

Värmekonduktiviteten används för att beskriva hur mycket energi per tidsenhet (dQ/dt) som kommer att transporteras genom materialet om det i materialet uppstår en temperaturgradient. För det endimensionella fallet kan temperaturgradienten vid en viss tidpunkt t betecknas som $(dT/dx)_t$ och vi får

$$\frac{dQ}{dt} = - \lambda A \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_t$$

där proportionalitetskonstanten λ är den ovan nämnda värmekonduktiviteten, medan A är tvärsnittsarean genom vilken värmetransporten sker. Minustecken i ekvationen insättes för att visa att värmetransporten sker i riktning av fallande temperatur.

Enheten för λ är W/mK.

Den statistiska fysikens teori och kvantmekaniken binder samman den makroskopiska parametern λ med fononbeskrivningen av värmetransporten.

Schematiskt kan man säga att λ beräknas genom att man summerar bidragen från alla fononmoder, vilket leder till en integral över alla exciterade svängningsfrekvenser. Bidraget från varje litet frekvensintervall är proportionellt mot energin $h\nu$ och mot antalet moder i intervallet. Detta antal ges av den så kallade energitillståndstätheten, som är av fundamental betydelse för alla termiska egenskaper.

Att finna en exakt teoretisk beskrivning för energitillståndstätheten i olika material vid olika temperatur är fortfarande ett av de mest intrikata problemen i den moderna teoretiska fysiken. Pionjäraryteten av sådana fysiker som A. Einstein och P. Debye kan nämnas i detta sammanhang.

I metaller och halvledare måste teorin för λ dessutom inkludera bidraget från elektronernas energitillståndstäthet.

Ur ekvationen ovan kan man härleda värmeledningsekvationen (se kursen för potential- och fältteori)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

där C_p = materialets värmekapacitivet (J/kgK)

ρ = materialets densitet (kg/m³)

Produkten $c = C_p \cdot \rho$ är materialets specifika värme per volymsenhet (J/m³ K). c anger hur mycket värmeenergi man kan lagra eller utvinna genom att ändra temperaturen av en volymenhet av materialet med en grad.

I ett mera generellt fall för tredimensionellt värme flöde får vi den så kallade allmänna värmeledningsekvationen.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \cdot \nabla^2 T + \frac{p(r, t)}{c}$$

där hänsyn också är tagen till möjligheten för en extra värmeutveckling inom själva materialet på grund av till exempel smältning eller fasövergångar och dylikt. $p(r, t)$ är producerad värmeeffekt/m³.

Den kanske något överraskande kopplingen mellan värmetransportprocessen och materialets specifika värme är ganska lätt att förstå om man utgår från fononbildningen av värmeledningen:

För att initiera värmetransportprocessen måste det skapas en temperaturgradient i materialet. Antag till exempel att en viss mängd energi tillförs en del av kroppen, dvs nya fononer i den delen av kroppen exciteras.

Temperaturen i denna del stiger, vilket givetvis är relaterat till materialets specifika värme enligt den termodynamiska ekvationen

$\frac{\partial Q}{\partial t} = C_p \cdot m \frac{dT}{dt}$. Samtidigt börjar de nya fononerna att utbreda sig genom materialet, dvs värmeledningsprocessen inleds. Den mängd av energi som nu börjar transporteras beror på dessa exciterade fononernas energitäthetsfördelning samt på deras hastighet, v , och deras fria medelväglängd, l .

En enkel teori (se Kittel: Thermal Physics) ger

$$\lambda = \frac{1}{3} v \cdot l \cdot c$$

Den, för en given temperatur, konstanta kvoten λ/c har fått ett eget namn och kallas värmediffusiviteten

$$a = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{3} v \cdot l \quad (1)$$

Observera att denna parameter ingår i den allmänna värmeledningsekvationen.

Värmediffusiviteten är således en materialparameter som beskriver hur snabbt fononerna transporteras genom material, dvs hur snabbt temperaturutjämnningen sker.

Enheten för a är m^2/s .

Under en period av uppvärmning eller avkylning behöver man känna värmediffusiviteten, a , ty denna parameter anger hur snabbt en temperaturändring fortplantas genom materialet.

När det stationära tillståndet väl har uppnåtts, dvs när temperaturen i varje punkt är oberoende av tiden, är det värmekonduktiviteten, λ , som är den viktiga storheten, eftersom den anger hur mycket värme som transporteras genom materialet.

En mätning av två av de tre parametrarna a , λ , c ger således information om de mest fundamentala och tekniskt betydelsefulla värmeegenskaperna hos ämnet. Det finns ett stort antal metoder för att studera värmetransport i olika material. Problemet är dock att nästan ingen av dem möjliggör en samtidig mätning av de nödvändiga parametrarna. En direkt mätning av a kräver icke-stationära förhållanden i materialet, bestämning av λ kräver å andra sidan en stationär temperaturfördelning, medan för mätning av c behövs en helt annan mätteknik (kalorimetri).

4. DEN TRANSIENTA HETFOLIEMETODEN (Transient Hot Strip Method)

Den metod som Du skall använda i denna laboration är en av de få metoder med vilken a , λ och därmed c kan bestämmas i ett enda försök. Metoden har tagits fram vid Fysiska institutionen, CTH, och är anpassad för mätningar i alla ämnen (fasta, flytande och gaser) med låg elektrisk ledningsförmåga.

En viktig fördel med hetfoliemetoden är att själva mätproceduren bara tar några sekunder. Vid mätningar på gaser och vätskor är detta betydelsefullt eftersom det innebär att konvektionen kan försummas. Då temperaturhöjningen i folien är låg ($< 0,5 \text{ K}$) kan vi även bortse från strålningsförluster.

En mycket tunn metallfolie (ungefär 10μ tjock) förs i kontakt med det studerade materialet. Denna metallfolie utnyttjas både som en värmekälla och resistanstermometer. Vid mätningar i gaser och vätskor placeras folien direkt in i det undersökta materialet. Vid mätningar i fasta kroppar kläms folien mellan två noga polerade ytor av samma material.

Under passagen av en konstant elektrisk ström genom folien utvecklas värme inne i folien varvid temperaturen och därmed resistansen hos folien ökar. Denna temperaturökning beror på hur snabbt det i folien utvecklade värmets förs bort av det omgivande materialet. Om det omgivande materialet är en dålig värmeledare kommer det mesta av värmets att stanna i den omedelbara närheten av folien och foliens resistans kommer att stiga betydligt. Om materialet däremot är en bra värmeledare, kommer resistansändringarna i folien att bli mindre.

Uppvärmningen sker under 5 ä 10 s och spänningen U_t registreras under denna tid med hjälp av skrivare. Värdet på U_t är relaterat till foliens resistansändring som i sin tur beror på foliens värmeavgivning till omgivningen. Problemet är att beräkna värmediffusiviteten a och värmekonduktiviteten λ för det omgivande materialet med kännedom om U_t 's variation med tiden.

Om vi med R_0 betecknar foliens ursprungliga resistans blir resistansen vid tiden t efter uppvärmningens början:

$$R_t = R_0(1 + \alpha \Delta T_t)$$

Här är α resistivitetsens temperaturkoefficient och ΔT_t är temperaturändringen i folien efter tiden t . Eftersom $U = RI$, där I är den konstanta strömstyrkan och U är den uppmätta spänningen för folien, får vi att:

$$U_t = U_0(1 + \alpha \Delta T_t), \quad U_0 \text{ spänningen vid tiden } t = 0$$

För de flesta metaller är α en noggrannt bestämd storhet (se TEFYMA-tabellen). ΔT_t beräknar man genom att lösa den allmänna värmeledningsekvationen med de aktuella randvillkoren.

Beräkningarna ger (se appendix):

$$U_t = U_o \left[1 + \frac{U_{tot} - U_o}{U_{tot}} \cdot \frac{\alpha I U_o}{2h\lambda\sqrt{\pi}} P(B\sqrt{t}) \right] \quad (2)$$

där $B = \frac{2\sqrt{a}}{d}$ (3)

d = foliens bredd

h = foliens längd

U_{tot} = spänningen från spänningskällan

$P(B\sqrt{t})$ är för givna värden på $B\sqrt{t}$ tabellerat i appendixen.

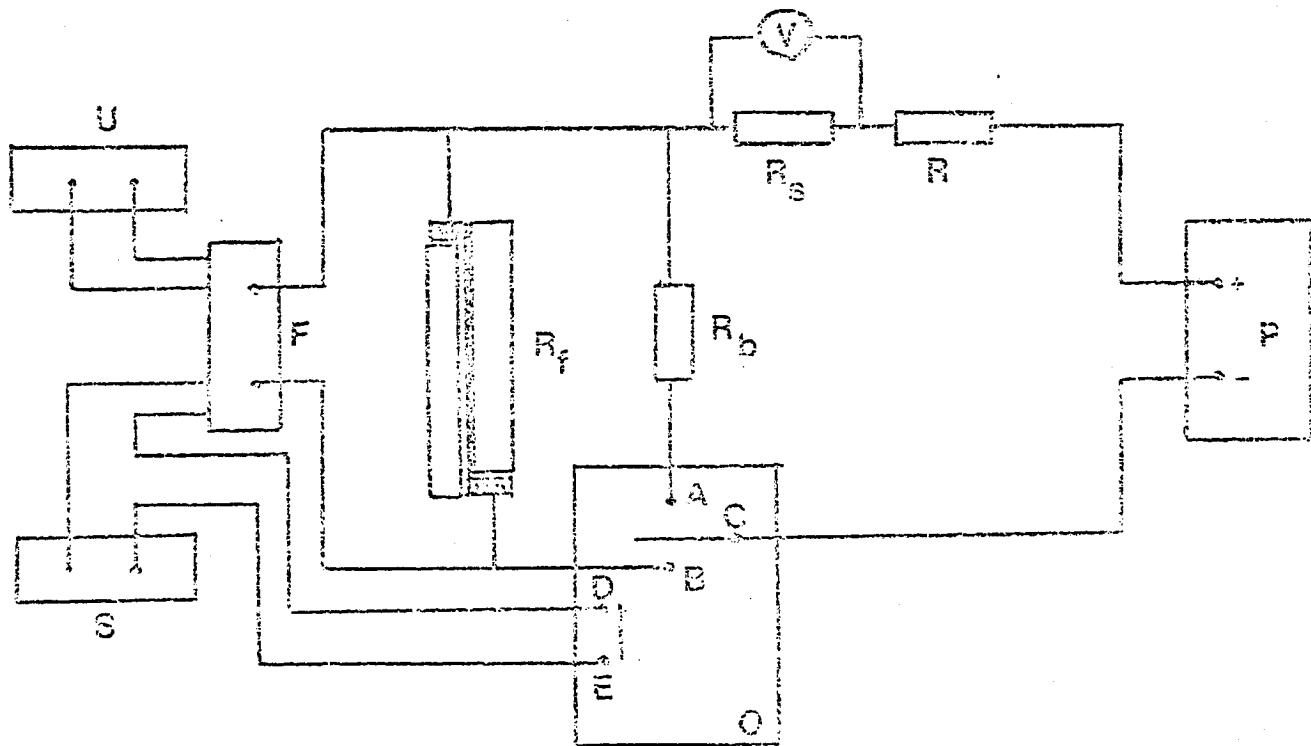
Ekvationen (2) kan skrivas

$$U_t = U_o + C \cdot P(B\sqrt{t})$$

där $C = \frac{U_{tot} - U_o}{U_{tot}} \cdot \frac{\alpha I U_o^2}{2h\lambda\sqrt{\pi}}$ (4)

Det betyder att för det rätta värdet på B får man en sådan uppsättning av värdet $P(B\sqrt{t})$ för olika t att en kurva av U_t som funktion av $P(B\sqrt{t})$ ger en rät linje. I princip behöver man alltså pröva olika B och korresponderande $P(B\sqrt{t})$ tills man erhåller en bästa anpassning av de experimentella U_t - och beräknade $P(B\sqrt{t})$ -värdena till en rät linje. När det rätta B är funnet kan värmediffusiviteten beräknas enligt ekvationen (3) om foliens bredd är känd. Värmeledningsförmågan beräknas genom att utnyttja skärningspunkten U_o och lutningen C av den räta linjen enligt ekvationen (4). Förutsättningen är att α , h , I , och U_{tot} är kända. Värmekapacitiviteten kan sedan beräknas ur ekvationen (1).

Den experimentella uppställningen består av en konstant strömkälla (spänningskälla i serie med motstånd som är stort i förhållande till folieresistansen). När punkterna A och C i omkopplaren O är kortslutna, driver denna strömkälla ström genom resistansen R_b av samma storlek som folieresistansen. Genom att ändra omkopplarens läge från AC till BC vid tiden $t = 0$ bortkopplas R_b och ersätts av R_f (folieresistansen). På detta sätt reduceras transienten vid omkopplingen av R_f . Samtidigt med BC erhålles en förbindelse mellan punkterna D och E i omkopplaren och spänningen U_t över R_f registreras med skrivare. Då ändringarna i U_t är små (c:a 10^{-4} à 10^{-5} V) används en reduceringsspanning (offset) och den resulterande spänningen registreras efter förstärkning av skrivaren.



Figur 1.

P är en spänningskälla, R är ett reglerbart motstånd för inställning av den önskade strömstyrkan, $R_s = 1 \Omega$ är ett standardmotstånd som tillsammans med voltmeter V möjliggör en direkt avläsning av strömstyrkan. R_b är ett motstånd som är lika stort som motståndet i folien R_f . F är en förstärkare (10 ggr) och S är en skrivare med varierbar tidsbas. U är en digitalvoltmeter för inställning av offsetspänningen. O är en omkopplare.

Från det erhållna diagrammet avläses U_t för olika t . De experimentella U_t -värdena prövas sedan tillsammans med olika uppsättningar av $P(B\sqrt{t})$ tills den bästa anpassningen till en rät linje uppnås. Därefter beräkna a , λ och c .

UTFÖRANDE

Följande material av byggnadstekniskt- respektive jordvärmelagringsintresse är tillgängliga för mätningen: furu; marmor, granit, vatten, frigolit och fönsterglas.

Välj ett prov och koppla upp uppställningen enligt figur 1 i handledningen. Strömomkopplaren fungerar på följande sätt: När både brytaren A och B är i läget "upp" är spänningskällan fränkopplad. Om brytaren A sätts i läget "ner" (blå lampa tänds) medan brytaren B är kvar i läget "upp" går strömmen genom hjälpkretsen via motståndet R_p . Brytaren A är kvar i läget "ner" och brytaren B placeras också i läget "ner". Strömmen går fortfarande genom hjälpkretsen (den blåa lampan är tänd) men nu har Du förberett omkopplingen till arbetskretsen. Omkopplaren A sätts i läget "upp" medan omkopplaren B är kvar i läget "ner" (röd lampa tänds). Strömmen går nu genom motståndet (folien) R_f . När mätningen är avslutad (eller om Du vill avbryta mätningen) sätts brytaren B i läget "upp".

Den differentiella förstarkaren fungerar på så sätt att inspänningen U_t minus förinställda offsetspänningen U_r förstärks 10 ggr och läggs på utgången. Den av skrivaren registrerade spänningen är alltså $\Delta U = 10(U_t - U_r)$.

Instruktionen till skrivaren finns på arbetsplatsen. Välj pennhastigheten 0.5 s/cm och känsligheten (span) 50 mV.

Använd ca 0.70 A vid mätningar med furu

"	"	3.25 A	"	"	"	marmor
"	"	3.40 A	"	"	"	granit
"	"	1.00 A	"	"	"	vatten
"	"	0.30 A	"	"	"	frigolit
"	"	2.20 A	"	"	"	fönsterglas

UTVÄRDERING.

Material:.....

$d(m) = \dots\dots\dots$ $\alpha = \dots\dots\dots$ $I = \dots\dots\dots$

$h(m) = \dots\dots\dots$ $B = \dots\dots\dots$ $U_r = \dots\dots\dots$

Bestäm U_t för tiderna $t = 0.5s, 1.0s, 1.5s, \dots, 6.0s$.

Anpassa U_t som funktion av $P(B\sqrt{t})$ till en rät linje (med hjälp av en grafisk eller numerisk metod). B beräknas med kännedom om att

$$a = 0.77 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \text{ för furu}$$

$$a = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \text{ för marmor}$$

$$a = 1.67 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \text{ för granit}$$

$$a = 1.44 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \text{ för vatten}$$

$$a = 1.65 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \text{ för frigolit}$$

$$a = 4.56 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \text{ för fönsterglas}$$

OBS! Att bestämma samtidigt både λ och a kräver tillgång till en dator. Dessutom, kommer programskrivningen att ta alltför lång tid i anspråk. Av den anledningen för Du a -värdena gratis.

Bestäm U_0 och C ur $U_t, P(B\sqrt{t})$ anpassningen.

$U_0 = \dots\dots\dots$ $C = \dots\dots\dots$

Beräkna λ och c enligt ekvationerna (4) och (1) i handledningen.

Temperaturledningsförmåga $\lambda = \dots\dots\dots$

Värmekapacitiviteten per volymenhet $c = \dots\dots\dots$

Jämför resultaten för Ditt prov med resultaten som Dina labkamrater fått för de andra materialen och svara på följande frågor:

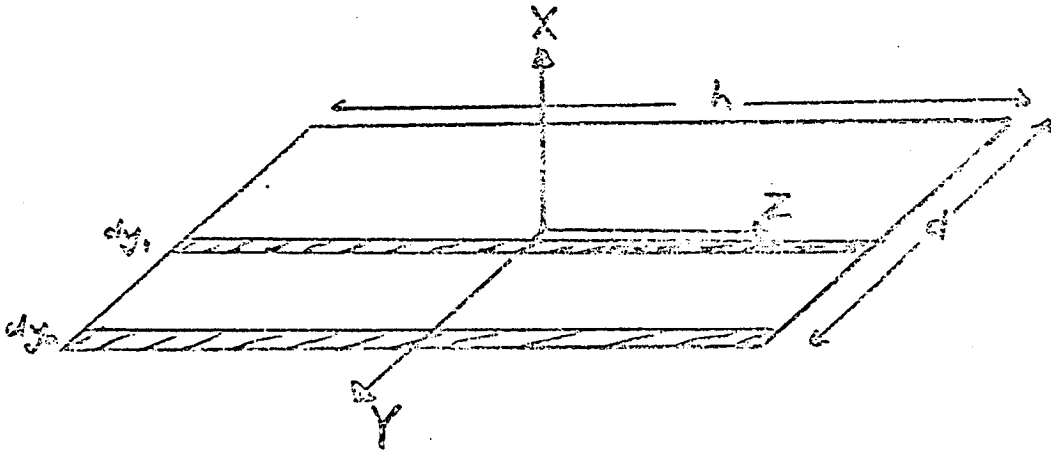
I. Vilket av de uppmätta materialen är den bästa värmeisolatorn?

II. Vilket av de uppmätta materialen leder värmet bäst?

III. Vilket av de uppmätta materialen lämpar sig bäst för värmelagring?

Beräkning av sambandet mellan spänningen över folien och materialets termiska egenskaper.

Vi väljer koordinatsystemet på så sätt att origo 0 ligger i centrum av folien med z-axeln placerad längs folien och x-axeln liggande vinkelrät mot foliens yta. (Se figur 4.) Foliens längd är h, bredden d och tjockleken v. Den elektriska strömmen antas flyta längs z-axeln.



Figur 4

Vi skall börja med att konstatera att det mittersta partiet av folien uppvärms av den passerande strömmen litet kraftigare än på kanterna. Om vi föreställer oss folien som bestående av tunna remsor med bredden dy så förlorar den mittersta remsan dy_1 en del av det inom remsan producerade värmets till de närliggande remsorna men samtidigt får den en viss tillströmning av värme därifrån medan den vid kanten liggande remsan dy_n får tillströmning av värme bara från en sida. Detta betyder att resistansen av dy_1 -remsan är större än av dy_n . För varje remsa placerad på avståndet y kan resistansen uttryckas som

$$dR(T) = \rho(T)h/vdy \quad (1)$$

$$\text{där } \rho(T) = \rho(T_0) \left\{ 1 + \alpha [T(y,t) - T_0] \right\} \quad (2)$$

$\rho(T)$ är foliens resistivitet vid temperaturen T , α är resistivitetsens temperaturkoefficient, $T(y,t)$ är temperaturen efter tiden t av remsan i fråga och T_0 är den ursprungliga temperaturen. Den totala resistansen kan beräknas enligt $1/R = 1/dR_1 + 1/dR_2 + \dots$ eller om vi övergår till integrering

$$\frac{1}{R} = \frac{v}{h\rho(T_0)} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dy}{1 + \alpha\Delta T(y,t)} \quad (3)$$

där ekvationerna (1) och (2) har blivit utnyttjade. $\Delta T(y,t) = T(y,t) - T_0$. Eftersom $\alpha < 4 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$ och temperaturändringarna $T(y,t) - T_0$ är mycket små (t o m i mitten av folien $\Delta T(0,t) < 0,5 \text{K}$) får vi att

$$\frac{1}{1 + \alpha \Delta T} = 1 - \alpha \Delta T + \dots \quad (4)$$

där bidrag från termer $(\alpha \Delta T)^2$ och högre är fullständigt försumbara. Detta leder till uttrycket:

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{\alpha}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \Delta T(y,t) dy} \quad \text{där } R_0 = \rho(T_0) \frac{h}{vd} \quad (5)$$

eller om vi utnyttjar serieutveckling på nytt till:

$$R(t) = R_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \Delta T(y,t) dy \right\} \quad (6)$$

där $\frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} [T(y,t) - T_0] dy$ representerar en slags medeltemperaturökning

i folien. Eftersom $U = RI$ får vi att variationen av spänningen över folien som funktion av tiden

$$U(t) = U_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{d} \int_{-d/2}^{d/2} [T(y,t) - T_0] dy \right\} \quad (7)$$

(Om du är tveksam angående de i ekvationerna (5) och (6) försummade termerna så lägg märke till att för typiska experimentella data

$U_0 = 0,2 \text{ V}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$ och $\Delta T = 0,5 \text{ K}$ blir bidragen från termen $U_0 \alpha^2 \Delta T^2 < 1 \mu\text{V}$, dvs under upplösningsförmåga av den mätapparat som du använder.)

$T(y,t) - T_0$ beräknas genom att lösa värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Genom att göra en s.k ansats (= initierad gissning) kommer vi fram till att lösningen har formen

$$T(x,y,z,t) = \frac{S}{8(\pi a t)^{3/2}} e^{-\left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right\} / 4at} \quad (9)$$

där $T(x,y,z,t)$ är temperaturen i materialet i punkten (x,y,z) vid tiden t och S är en parameter som representerar den värmeenergi som produceras i punkten (x',y',z') . S erhålles ur villkoret att den totala värmemängden i materialet med densiteten ρ och värmekapacitiveteten c_p är

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho c_p T dx dy dz &= \\ &= \frac{S \rho c_p}{8(\pi a t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x')^2/4at} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-y')^2/4at} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z')^2/4at} dz = \\ &= S \rho c_p \end{aligned} \quad (10)$$

För en yta $dy'dz'$ blir den frigjorda värmemängden under tiden dt :

$$S \rho c_p = (IU_0/hd) dy' dz' dt \quad (11)$$

där IU_0 är den totala effekten som tillförs folien och hd är foliens yta. Vi får alltså

$$S = (IU_0/hdc_p\rho) dy' dz' dt \quad (12)$$

Den totala temperaturändringen i punkten (x,y,z) vid tiden t om värmekällan producerar energi kontinuerligt från tiden $t = 0$ till t fås då genom att integrera ekvationen (9) enligt

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) - T_0 &= \int_0^t \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{IU_0}{hdc_p\rho} dy' dz' dt \cdot \frac{1}{8(\pi a t)^{3/2}} \\ &\cdot e^{-\left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right\} / 4at} \end{aligned} \quad (13)$$

Detta är en allmän ekvation för en temperaturändring i en godtycklig punkt (x,y,z) i materialet. Vi är dock intresserade av temperaturfördelningen i den delen av materialet som befinner sig i en direkt termisk kontakt med folien eftersom detta ger oss samtidig temperaturfördelning på foliens yta. Eftersom tjockleken v på folien är mycket liten och temperaturen inne i folien är densamma som på ytan, dvs $x = v/2 = 0$ får vi att $e^{-x^2/4at} = 1$. Vidare, om vi bortser från det lilla området vid de elektriska ledningskontaktarna är temperaturen längs varje remsa i riktning z konstant. Vi kan därför beräkna medeltemperaturhöjningen längs y -axeln för $z = 0$.

Detta ger:

$$\frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} [T(y,t) - T_0] dy = \frac{IU_0\alpha}{2h\lambda\sqrt{\pi}} \cdot P(B\sqrt{t}) \quad (14)$$

där $B = \frac{2\sqrt{a}}{d}$ och

$$\begin{aligned} P(B\sqrt{t}) &= \int_0^t dt \frac{1}{d\sqrt{\pi} a\sqrt{t^3}} \int_{-d/2}^{d/2} dy' e^{-(y-y')^2/4at} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} dz' e^{-z'^2/4at} = \\ &= B\sqrt{t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{B\sqrt{t}} e^{-u^2} du - \frac{B\sqrt{t}}{\sqrt{4\pi}} \left[1 - e^{-\frac{1}{B\sqrt{t}}} \right] + \frac{1}{4\pi} \int_{B\sqrt{t}}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv \quad (15) \end{aligned}$$

Därmed, genom att kombinera (14) och (7), får vi:

$$U(t) = U_0 + \frac{\alpha IU_0^2}{2h\lambda\sqrt{\pi}} P(B\sqrt{t}) \quad (16)$$

I ekvationen (14) har vi antagit att effekten IU_0 som utvecklas i folien är konstant och kan tas ut utanför integralen (jämför också ekvationen (13)). Detta villkor kan uppfyllas om den totala resistansen i kretsen (med folien inräknat) är nära dubbelt så stor som foliens resistans dvs när $R_{tot} \approx 2R_0$. Den ökande resistansen i folien åtföljs då av en fallande strömstyrka på så sätt att den i folien utvecklade effekten förblir konstant. Ekvationen (16) beskriver då enbart de spänningsvariationer över folien som uppkommer på grund av ändringen av foliens resistans. Den uppmätta spänningen däremot kommer att inkludera utöver det också ett bidrag från den fallande strömstyrkan. Om vi å andra sidan väljer $R_{tot} \gg R_0$ hålles strömmen konstant men den i folien utvecklade effekten blir då i stället tidsberoende. Tar man hänsyn till den varierande strömstyrkan och/eller den varierande effekten får man att med en god approximation gäller:

$$U_t = U_0 + \frac{R_{tot} - R_0}{R_{tot}} \cdot \frac{\alpha IU_0^2}{2h\lambda\sqrt{\pi}} P(B\sqrt{t}) \quad (17)$$

där U_t är den uppmätta spänningen över folien.

$B\sqrt{t}$	$P(B\sqrt{t})$	$B\sqrt{t}$	$P(B\sqrt{t})$	$B\sqrt{t}$	$P(B\sqrt{t})$	$B\sqrt{t}$	$P(B\sqrt{t})$
2.01	1.089	2.51	1.210	3.01	1.310	3.51	1.396
2.02	1.091	2.52	1.212	3.02	1.312	3.52	1.397
2.03	1.094	2.53	1.214	3.03	1.314	3.53	1.399
2.04	1.097	2.54	1.217	3.04	1.316	3.54	1.400
2.05	1.099	2.55	1.219	3.05	1.318	3.55	1.402
2.06	1.102	2.56	1.221	3.06	1.319	3.56	1.404
2.07	1.105	2.57	1.223	3.07	1.321	3.57	1.405
2.08	1.107	2.58	1.225	3.08	1.323	3.58	1.407
2.09	1.110	2.59	1.227	3.09	1.325	3.59	1.408
2.10	1.112	2.60	1.229	3.10	1.327	3.60	1.410
2.11	1.115	2.61	1.231	3.11	1.328	3.61	1.411
2.12	1.118	2.62	1.234	3.12	1.330	3.62	1.413
2.13	1.120	2.63	1.236	3.13	1.332	3.63	1.414
2.14	1.123	2.64	1.238	3.14	1.334	3.64	1.416
2.15	1.125	2.65	1.240	3.15	1.335	3.65	1.417
2.16	1.128	2.66	1.242	3.16	1.337	3.66	1.419
2.17	1.130	2.67	1.244	3.17	1.339	3.67	1.420
2.18	1.133	2.68	1.246	3.18	1.341	3.68	1.422
2.19	1.135	2.69	1.248	3.19	1.342	3.69	1.423
2.20	1.138	2.70	1.250	3.20	1.344	3.70	1.425
2.21	1.140	2.71	1.252	3.21	1.346	3.71	1.427
2.22	1.143	2.72	1.254	3.22	1.348	3.72	1.428
2.23	1.145	2.73	1.256	3.23	1.349	3.73	1.430
2.24	1.148	2.74	1.258	3.24	1.351	3.74	1.431
2.25	1.150	2.75	1.260	3.25	1.353	3.75	1.432
2.26	1.152	2.76	1.262	3.26	1.355	3.76	1.434
2.27	1.155	2.77	1.264	3.27	1.356	3.77	1.435
2.28	1.157	2.78	1.266	3.28	1.358	3.78	1.437
2.29	1.160	2.79	1.268	3.29	1.360	3.79	1.438
2.30	1.162	2.80	1.270	3.30	1.361	3.80	1.440
2.31	1.164	2.81	1.272	3.31	1.363	3.81	1.441
2.32	1.167	2.82	1.274	3.32	1.365	3.82	1.443
2.33	1.169	2.83	1.276	3.33	1.366	3.83	1.444
2.34	1.172	2.84	1.278	3.34	1.368	3.84	1.446
2.35	1.174	2.85	1.280	3.35	1.370	3.85	1.447
2.36	1.176	2.86	1.282	3.36	1.371	3.86	1.449
2.37	1.178	2.87	1.284	3.37	1.373	3.87	1.450
2.38	1.181	2.88	1.286	3.38	1.375	3.88	1.452
2.39	1.183	2.89	1.288	3.39	1.376	3.89	1.453
2.40	1.185	2.90	1.290	3.40	1.378	3.90	1.454
2.41	1.188	2.91	1.292	3.41	1.380	3.91	1.456
2.42	1.190	2.92	1.293	3.42	1.381	3.92	1.457
2.43	1.192	2.93	1.295	3.43	1.383	3.93	1.459
2.44	1.194	2.94	1.297	3.44	1.384	3.94	1.460
2.45	1.197	2.95	1.299	3.45	1.386	3.95	1.461
2.46	1.199	2.96	1.301	3.46	1.388	3.96	1.463
2.47	1.201	2.97	1.303	3.47	1.389	3.97	1.464
2.48	1.203	2.98	1.305	3.48	1.391	3.98	1.466
2.49	1.206	2.99	1.307	3.49	1.392	3.99	1.467
2.50	1.208	3.00	1.308	3.50	1.394	4.00	1.469