CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Fysiska institutionen
Å. Fäldt, R. Ryberg/BE

Augusti 1980, 1983

M5

GITTERSVÄNGNINGAR

AVSIKT

Försöket avser att, med hjälp av en mekanisk modell, studera några av de viktigaste egenskaperna hos gittersvängningar. Det väsentliga med laborationen är inte själva mätningen, utan den efterföljande behandlingen av mätdata.

TEORI

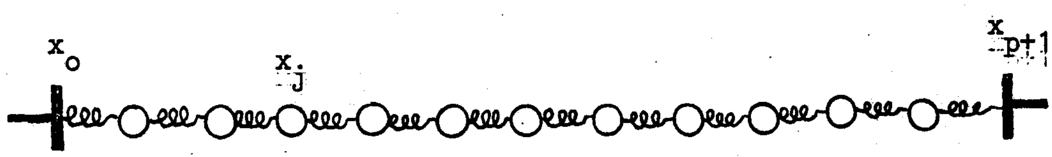
Allmänt

I fasta ämnen svänger atomerna kring sina, av kristallstrukturen givna, jämviktslägen. Dessa svängningar är inte oberoende, eftersom atomerna påverkar varandra med krafter, som beror på avståndet mellan atomerna. De resulterande kopplade svängningarna, gittersvängningarna, är av stor betydelse i fasta tillståndets fysik och kan exempelvis förklara en företeelse som specifika värmet och dess temperaturvariation.

Gittersvängningar studeras vanligen med neutrondiffraktion. Under försöket ska vi emellertid använda en mekanisk analogi, som representerar en endimensionell kristall med ett litet antal atomer. Detta förfaringssätt ger en åskådlig bild av några viktiga egenskaper hos gittersvängningarna.

Enatomiga kedjan.

Här är alla atomerna lika.



Låt x_j vara förflyttningen av j:te vikten

m dess massa

c fjäderkonstanten

d fjäderns längd

p antalet vikter

Rörelseekvationen blir

$$\frac{m\, d^2x_j}{dt^2} = c(x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j) \qquad (1)$$

Vi söker lösningar som beskriver stående vågor

$$x_j = a \cos(kdj-\emptyset) \cdot \cos \omega t \qquad (2)$$

där $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ är vågtalet och ω vinkelfrekvensen.

Vid substitution av ekv (2) i (1) erhålles

$$-\omega^2 \cdot m \cdot a \cdot \cos(k \cdot d \cdot j-\emptyset) = c \cdot a \{\cos [k \cdot d(j+1)-\emptyset] + \cos [k \cdot d(j-1)-\emptyset]$$

$$-2 \cos [kd \cdot j-\emptyset]\}$$

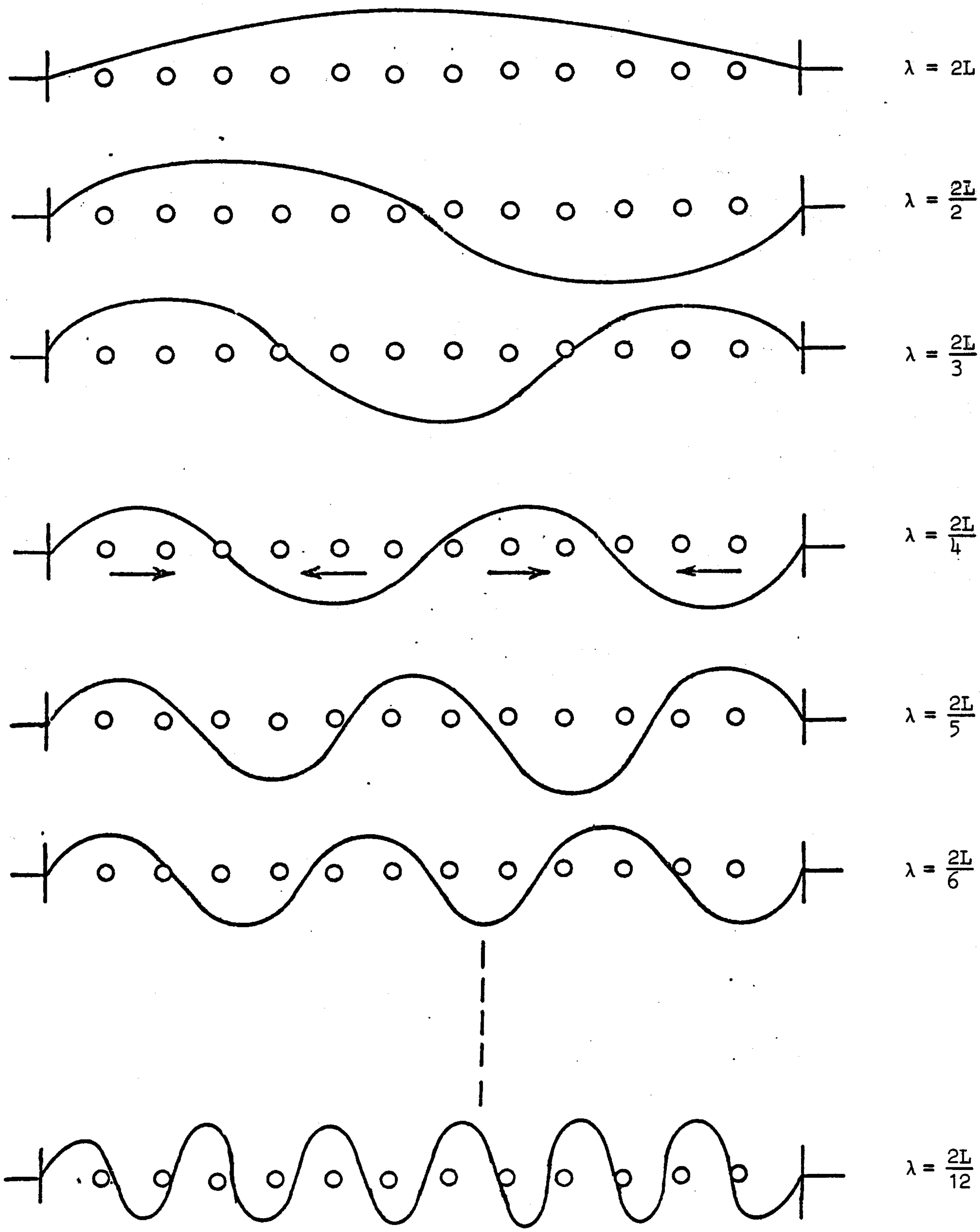
$$-\omega^2 \cdot m = 2c(\cos kd-1) = 4c \sin^2 \frac{kd}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4c}{m}} \cdot \left|\sin \frac{kd}{2}\right| \qquad (3)$$

Detta är relationen mellan ω och k; vilken kallas DISPERSIONSRELATIONEN. De värden på k för vilka vi får resonanssvängningar är bestämda av randvillkoren. I det aktuella fallet har vi noder i båda ändar, dvs

$x_o = 0$ och $x_{p+1} = 0$ för alla t.

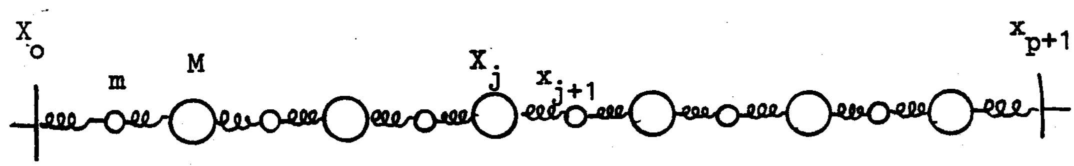
Några av de olika svängningsmoderna visas i fig. 1. Sinuskurvorna representerar amplituden för vikternas svängningar i ett visst tidsögonblick (ögonblicksbild vid maximalt utslag) och L är sammanlagda längden av fjädrarna.



Figur 1. Svängningsmoderna för ett monoatomärt endimensionellt gitter med moder i ändarna.

Tvåatomiga kedjan

En tvåatomig jonkristall, såsom NaCl, kan endimensionellt representeras på så sätt att man har två olika massor jämnt ordnade längs kedjan.



Rörelseekvationerna får formen

$$\frac{M\, d^2 X_j}{d\, t^2} = c(x_{j+1} + x_{j-1} - 2\, X_j) \qquad (7a)$$

$$\frac{m\, d^2 x_{j+1}}{d\, t^2} = c(X_{j+2} + X_j - 2\, x_{j+1}) \qquad (7b)$$

Vi väljer åter lösningen för en stående våg

$$X_j = A \cos(kdj-\phi) \cos \omega t \qquad (8a)$$

$$x_{j+1} = a \cos(kd(j+1)-\phi) \cos \omega t \qquad (8b)$$

genom att substitutera ekv. 8 i ekv. 7 fås

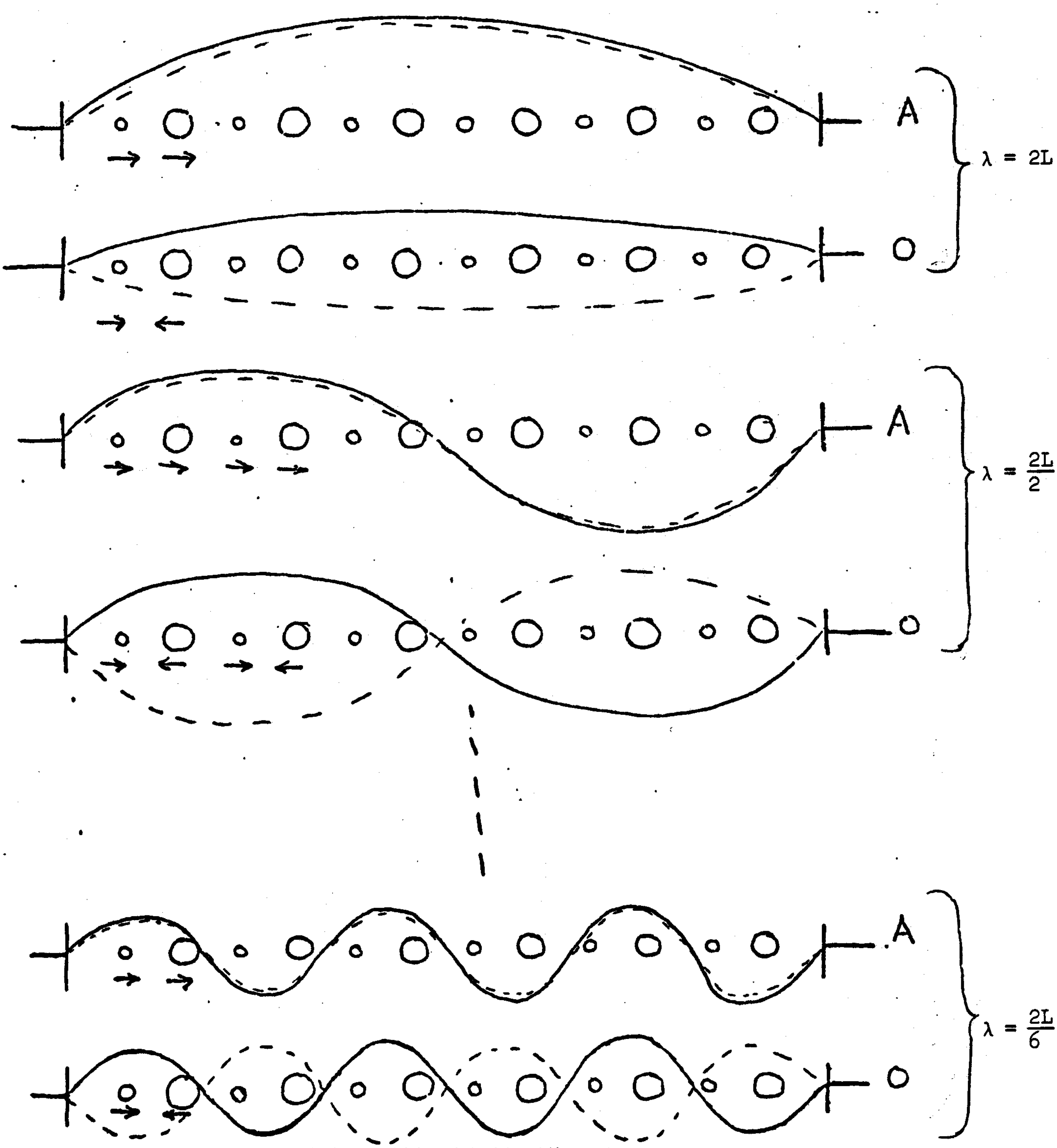
$$\omega^2 = \frac{c}{M\, m} \left\{M + m \pm \left[(M + m)^2 - 4\, M\, m \sin^2 kd\right]^{1/2}\right\} \qquad (9)$$

och kvoten mellan amplituderna bestäms av

$$\frac{A}{a} = \frac{(M - m) \pm \left[(M + m)^2 - 4\, M\, m \sin^2 kd\right]^{1/2}}{2\, m \cos kd} \qquad (10)$$

Således har i det tvåatomiga fallet ω-k kurvan två grenar. Den övre grenen för vilken A och a har motsatta tecken kallas optiska grenen. Den nedre med a och A med samma tecken, kallas akustiska grenen.

Gränsvillkor $X_o = 0$ $x_{p+1} = 0$ ger $\phi = \frac{\pi}{2}$ och $kd = \frac{N \cdot \pi}{p+1}$



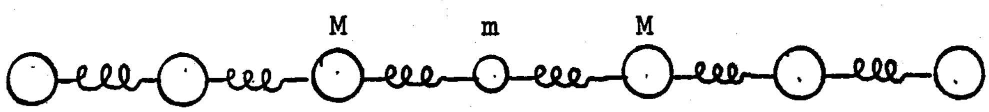
$\overline{\qquad\qquad}$ motsvarar förflyttningen hos o

\- - - - - - - - - - motsvarar förflyttningen hos O

Figur 2. Svängningsmoderna för ett tvåatomigt endimensionellt gitter med noder i ändpunkterna.

Lokaliserad gittersvängning

Om det finns en föroreningsatom i en monoatomär kristall, som är mycket lättare än kristallens atomer, existerar det ett svängningstillsånd där endast den lätta föroreningsatomen och några få atomer kring den svänger, vilket då kallas en lokaliserad gittersvängning.



Låt kristallatomernas massa vara M och föroreningsatomens m. Med samma antagande och samma matematik som tidigare fås för denna lokaliserade fonon .

$$\omega^2 = \omega_{max}^2 \frac{M^2}{2Mm - m^2} \qquad (11)$$

där $\omega_{max} = \sqrt{\frac{4c}{M}}$ är den maximala frekvensen för fononer i det ostörda gittret.

UTFÖRANDE

Apparatur:

Gittermodellen består av en rad aluminiumvikter, vilka representerar atomer, och mellan dem spiralfjädrar, som ger krafterna mellan atomerna. En given atom påverkas alltså i modellen endast av sina två närmsta grannar.

För att eliminera friktionen hålls hela gitterkedjan svävande med hjälp av tryckluft, som pressas ut genom små hål i underlaget.

En elektrisk motor med variabelt varvtal är via en vevstake förbunden med kedjans ena ända. Denna motor används för att alstra stående vågor i gitterkedjan. Som ett hjälpmedel för att snabbare hitta de olika svängningsmoderna mätes vevaxelns varvtal med en digital tachometer. Fjädrarna är ömtåliga, och motorn får därför inte köras så länge på resonansvarvtalen att amplituden hos svängningen blir för stor och fjädrarna kröks. Svängningarna kan stoppas genom att tryckluften stängs av och släpps på några gånger.

Fjäderlängd	d = 5,0 cm
Ryttarnas massa	m = 77.0 g
Al-viktens massa	31.4 g

Mätningar:

Motorn körs på något av de angivna varvtalen. Varvtalet varieras något tills en stående våg uppkommer varefter motorn stängs av. Frekvensen bestäms genom att mäta tiden för ett antal svängningar hos en ryttare (10-30 st, beroende på frekvensen). Våglängden bestämmes genom att man räknar hur många noder som förekommer längs kedjan. (I noderna är amplituden noll och ryttarna på ömse sidor om en nod svänger med motsatt fas.) I alla beräkningar försummas aluminiumvikternas längd.

Ungefärligt varvtal på axeln vid resonans:

Enatomigt:	11, 22, 34, 45, 54, 64, 73, 81, 86, 90, 92, 94 rpm
Tvåatomigt:	10, 20, 30, 42, 50, 57, 71, 76, 81, 83, 88, 90 rpm

Bearbetning:

(A) Monoatomär kedja

1) Rörelsen för den j:te atomen i en enatomig kedja med totalt p st atomer kan skrivas

$$x_j = a \cos(j \cdot kd - \phi) \cdot \cos \omega t$$

Visa att randvillkoren $x_o = 0$ och $x_{p+1} = 0$ för alla t medför

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ och } k = \frac{N \cdot \pi}{(p+1) \cdot d}$$

där N = heltal.

2) Hur många tillåtna svängningsmoder får du?

3) Från dina experimentella värden beräknas ω och k. Rita in ω som funktion av k i ett diagram. Uttryck k i $(\frac{\pi}{13\ d})$.

4) Rita i ω-k diagrammet ut gränsen för 1:a Brillouin zonen!
Varför räcker det med att endast betrakta vågvektorer i 1:a Bz?

5) Hur skiljer sig vår försöksuppställning från situationen i en reell kristall?
Vilka följder får detta för dispersionskurvan?

6) Hur stor är grupphastigheten $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ på gränsen till 1:a Bz?
Vad innebär detta fysikaliskt?

7) Ett vågsystem genom ett medium kallas dispersivt om det inte råder ett linjärt samband mellan ω och k.
I vilka områden av ω-k diagrammet råder proportionalitet och i vilka områden är detta inte fallet?

8) Beräkna ljudhastigheten i modellen med hjälp av

$$V = \lim_{k \to o} \frac{\omega}{k}$$

9) Bestäm V genom att direkt mäta upp pulshastigheten längs kedjan.

10) Bestäm kraftkonstanten c från dels den linjära delen av ω-k diagrammmet samt dels från dispersionskurvan i Bz-gränsen.

(B) Diatomär kedja.

11) Rita upp ω (k) i diagram 2.

12) Bestäm och rita in gränsen för 1:a Bz för den tvåatomiga kedjan.

13) Rita in dispersionskurvan för ljus i vacuum i diagram 2.
Vilka slutsatser kan du dra därav?

14) Vad skulle hända med det förbjudna gapet i gränsfallet då $M \rightarrow m$?

15) Bestäm kraftkonstanten c från den optiska grenen då $k \rightarrow 0$.

16) Bestäm med hjälp av detta värde på c gränsfrekvenserna för optiska och akustiska grenarna samt beräkna gapet vid zongränsen.

(C) Lokaliserad fonon.

17) Lägg 2 Al-vikter på alla ryttare utom en mitt på kedjan. Excitera fononen genom att lätt knuffa till den lätta ryttaren med ett finger. Motorn skall naturligtvis stå stilla. Mät frekvensen som tidigare.

18) Beräkna frekvensen ur (11) med de kända vikterna och det ω_{max}, som erhölls för den monoatomära kedjan.