Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
Fysiska institutionen
Klara Augenlicht, Arne Rosén

Mars 1978
12 sidor

M3

GRAVITATION

MÅLSÄTTNING
Att påvisa den allmänna gravitationen samt göra en bestämning gravitationskonstanten med hjälp av en torsionsvåg.

FÖRBEREDELSER
Du skall ha läst igenom lab-PM ordentligt och kunna svara på instuderingsfrågorna.

Namn.. Kurs...

Utförd den..................................... Handledare..

Godkänd den.................................. av...

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
FYSISKA INSTITUTIONEN
Klara Augenlicht, Arne Rosén/BE

GRAVITATION M3

AVSIKT

Att påvisa den allmänna gravitationen samt göra en bestämning av gravitationskonstanten m.h.a. torsionsvåg.

"Gravitationsforskningens historia äger tre stora namn: Galileo Galilei - den förste som undersökte hur kroppar faller; Isaac Newton - den förste som insåg att gravitationen är en kraft som verkar i hela universum; Albert Einstein - som förklarade att gravitationen bara är ett utslag av den fyrdimensionella rumstidens krökning." George Gamow.

INLEDNING

Ända fram till sextonhundratalet ansågs det att kroppens tyngd var en inneboende egenskap hos en kropp och behövde ingen förklaring. Det var först med Newton och en del samtida vetenskapsmän som en ny teori uppstod. Enligt denna borde kroppens tyngd betraktas som en dragningskraft mellan jorden och kroppen.

Man trodde också på den tiden att de lagar som styrde himlakropparnas rörelse var helt skilda från de lagar som verkade på jorden. Isaac Newton studerade vid naturvetenskapliga fakulteten i Cambridge himlakropparnas rörelse. Särskilt planeternas och solens rörelser var på den tiden ett mycket diskuterat ämne. År 1665 kom pesten, och högskolan stängdes. Studenterna åkte hem. Hemma i Wodsthorpe tänkte Newton vidare på de problem man diskuterat i skolan. Anekdoten säger att medan han såg ett äpple falla från ett träd insåg han att det måste vara samma kraft som låter äpplet falla ner från ett träd, och som håller månen i dess bana runt jorden. År 1687 publicerade Newton i sin "Principia Mathematica" lagen om den allmänna gravitationen, enligt vilken:

<u>Två materiella föremål attraherar varandra med en kraft som är proportionell mot produkten av deras massor och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan dem.</u>

Om vi betecknar de båda kropparnas massor med M_1 och M_2 och avståndet mellan dem med R, uttrycks gravitationskraften med formeln:

$$F = G\frac{M_1 \cdot M_2}{R^2} \qquad (1)$$

där G är en konstant kallad gravitationskonstanten.

UTFÖRANDE

Försöks uppställning.

Newton fick aldrig uppleva det direkta beviset för sin lag, men tre fjärdedels sekel efter hans död framlade en annan framstående brittisk vetenskapsman Henry Cavendish , ett sådant bevis. Cavendish begagnade sig av en torsionsvåg som utgör en mycket känslig apparatur som på hans tid representerade höjden av experimentell exakthet.

Allmänt gäller att när en rak, elastisk tråd vrides en liten vinkel kring sin axel uppstår spänningar i tråden som åstadkommer ett återförande kraftmoment det s.k. torsionsmomentet. För små vridningar är torsionsmomentet M proportionellt mot ϕ dvs

$$M = D\phi \qquad (2)$$

där D är det s.k. direktionsmomentet som är en funktion av trådens längd, diameter och en material-konstant för tråden som kallas torsionsmodulen.

Principen för Cavendishvågen framgår av figurer 1 och 2.

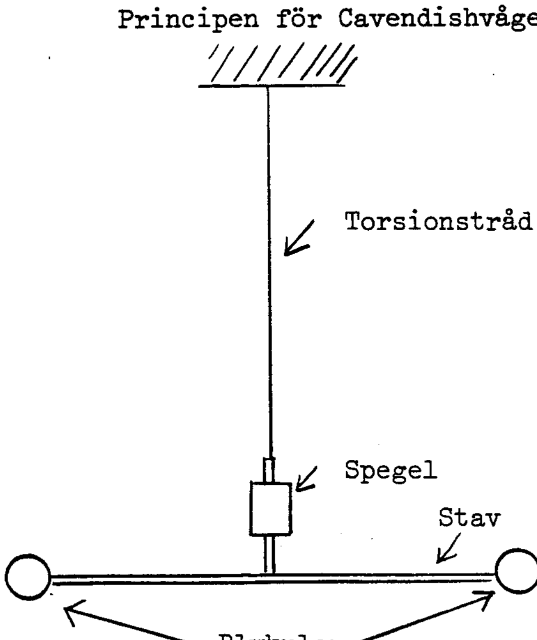


Fig. 1.

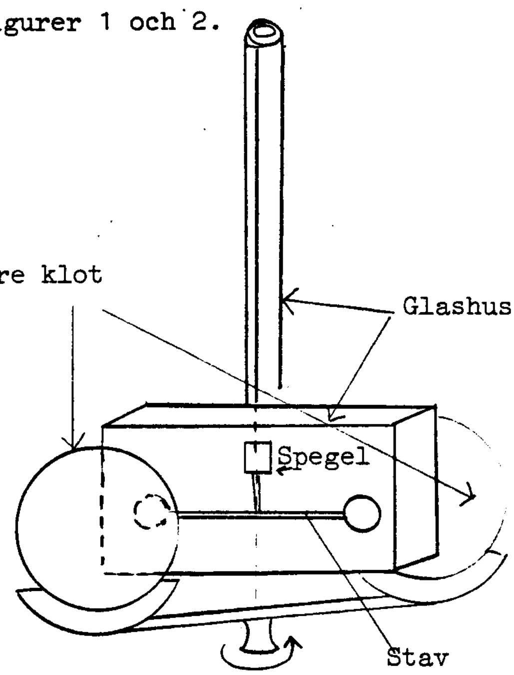


Fig. 2.

En stav med en liten kula i varje ända hänger i en lång, tunn tråd (torsionstråd) inuti ett glashus, som hindrar eventuella luftstömmar från att störa den.

Utanför glashuset placerar man på en hållare två tunga blykulor som kan vridas kring en centralaxel. Om systemet från början befinner sig i ett jämviktsläge dvs ingen rörelse förekommer, kan man genom att förändra de stora klotens läge observera hur staven med de båda små kloten vrider sig på grund av gravitationspåverkan från de stora kloten.

I själva verket utför vågen en dämpad svängningsrörelse som slutligen resulterar i ett nytt jämviktsläge.

Gravitationskraften mellan de stora och små kloten uppvägs i jämvikt av torsionstrådens elastiska krafter.

FÖRSÖKETS UTFÖRANDE

OBS! Rör ej vågen innan handledaren instruerat!

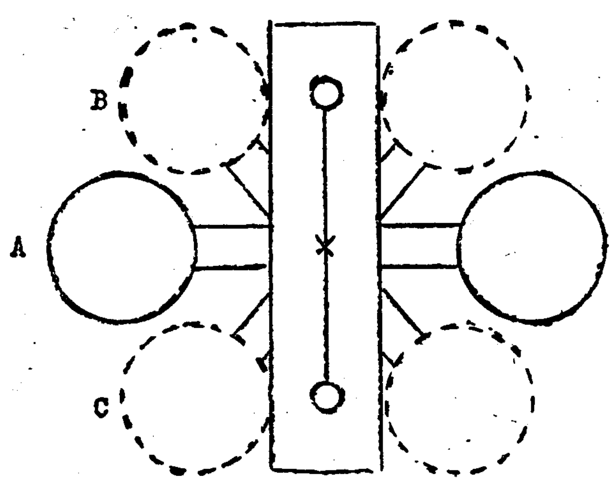


Fig. 3

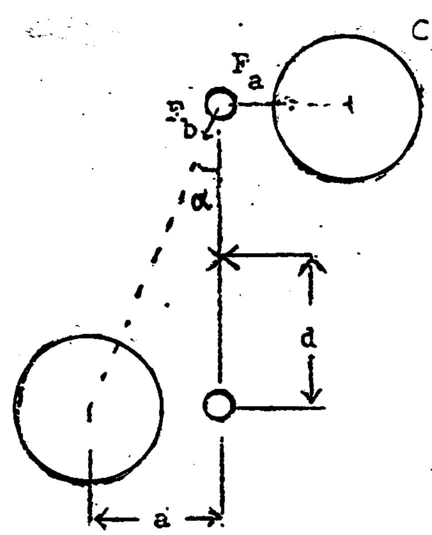


Fig. 4

Vågen är justerad så, att i jämvikt svarande mot de stora kloternas läge A, är var och en av de små kulorna lika långt från våghusets båda yttersidor. (Vågen hänger "fritt".)

OBS! Före försökets igångsättande måste eventuellt vissa justeringar göras och glasplattorna antistatbehandlas (muntlig instruktion).

I lägen motsvarande stora klotens lägen B eller C efter att systemet har uppnått en ny jämvikt är tråden vriden en viss vinkel ϕ_{AB} (resp ϕ_{AC}) ifrån det läge då det hänger fritt.

De utifrån verkande krafter, som strävar att vrida vågen, kan beräknas ur gravitationslagen enligt fig. 4. Med M = massan hos en yttre kula och m = massan hos en inre, erhålles den vridande kraften, som verkar på en av de små kulorna ur uttrycket.

$$F_1 = F_a - F_b \sin\alpha = G \cdot \frac{Mm}{a^2} - G \cdot \frac{Mm}{a^2 + 4d^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4d^2}} \qquad (3)$$

eller

$$\boxed{F_1 = G \cdot \frac{Mm}{a^2} \cdot k} \qquad (3a)$$

där a=avståndet mellan kulornas centrum

$$\text{där } k = 1 - \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4d^2}}\right]^3 = 1 - \left[1 + (2\tfrac{d}{a})^2\right]^{-1.5} \qquad (3b)$$

d=avståndet mellan liten kulas centrum och vridpunkten

Vridmomentet på staven blir nu:

$$D \, \phi_{AB} = 2 \, F_1 \cdot d \qquad (4)$$

där D-torsionstrådens direktionsmoment

(Faktorn 2 erhålles p.g.a. att vi har två kulor, en i varje ända av staven.)

Eftersom det är svårt att placera de stora kloten exakt i läge A är det lämpligare att bestämma vinkeln mellan lägen motsvarande B och C. Om staven vrider sig vinkeln $\phi_{AB} = \frac{2F_1 d}{D}$ mellan A och B så vrider den sig vinkeln

$$\boxed{\phi_{BC} = 2 \cdot \phi_{AB} = \frac{4F_1 \cdot d}{D}} \qquad (5)$$

mellan lägen B och C.

<u>Bestämning av ϕ_{BC} och D</u>

Som sagts tidigare, när vågen sätts ur jämvikt utför vågen en svängningsrörelse runt ett nytt jämviktsläge.

Man kan observera denna rörelse genom att använda sig av en liten spegel fastsatt vid Cavendish-vågen enligt fig. 1. På c:a en meters avstånd från spegeln placerar man en skala med lampa (fig. 5).

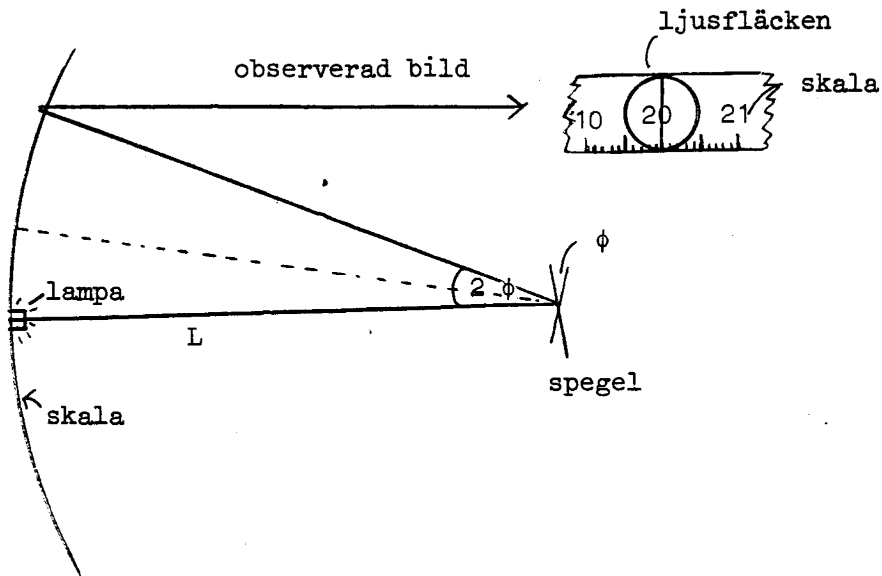


Fig. 5.

Om man riktar lampan mot spegeln och justerar skalan så att spegelbilden faller på skalan kan man observera vågens rörelse på skalan. Observera att om spegeln vrider sig vinkeln ϕ mellan två lägen, blir motsvarande observerat vinkelavstånd på skalan 2ϕ (jmfr fig. 5). Försöket går ut på att man bringar systemet ur jämvikt genom att placera de yttre kulorna i läge B (eller C). Därefter avläses ljusfläckens läge på skalan var 20:e sek och på så sätt följer man vågens rörelse 3 hela perioder(sammanlagt c:a en halvtimme).

Torsionsvågens rörelseekvation är:

$$I \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \lambda \frac{d\phi(t)}{dt} + D(\phi(t) - \phi_0) = 0 \qquad (6)$$

där

I = stavens tröghetsmoment $I = 2\ md^2$

λ = dämpningsfaktor

D = direktionsmomentet enligt ekv (2) och (4)

ϕ_0 = jämviktsläge! (ϕ_{0B}, eller ϕ_{0C})

Lösning är (Se kompendium i mekanik)

$$\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 \cos(\omega t + \delta)e^{-\kappa t} \qquad (7)$$

där ϕ_1 = amplitud beroende av begynnelsevillkor (hur stark "knuff" vågen får)

δ = en fasfaktor (beror också av begynnelsevillkor, t.ex. den tidpunkt då man börjar avläsa)

ω = kallad för vinkelfrekvensen är för en dämpad rörelse:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$$

där

$$\kappa = \frac{\lambda}{2I} \quad \text{och} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{I}$$

om $\omega_0^2 \gg \kappa^2$ blir $\omega = \omega_0$

fysikaliskt betyder detta att dämpningen är tillräckligt liten för att inte påverka perioden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2md^2}{D}}$$

härur får vi det efterlängtade D (genom att bestämma rörelsens svängningperiod).

$$D = 4\pi^2 \ \frac{2\ md^2}{T^2} \tag{8}$$

Nu gäller slutligen att bestämma ϕ_{BC}
Om vi ritar ett digaram på $\phi(t)$ får vi en cosinuskurva "dämpad" med faktor $e^{-\kappa t}$ jmf. fig. 6

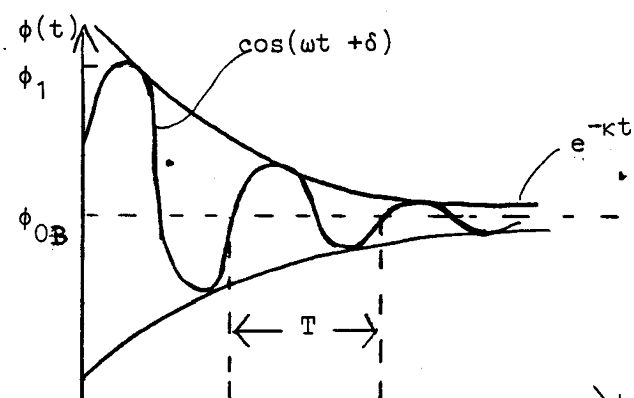


Fig. 6.

Kurvans läge då tiden går mot oändligheten blir jämviktsläge ϕ_{OB}.

Om vi från början bestämt någon av punkterna på skalan som origo (och då är lämpligt att välja punkt 0), så får vi jämviktsläge ϕ_{OB} (vid B-läge) relativt skalans 0. På samma sätt skall man bestämma jämviktsläge ϕ_{OC} genom att upprepa försöket med stora kloten i läge C.

Vi får då $\phi_{BC} = \left| \phi_{OB} - \phi_{OC} \right|$ (9)

Nu återstår att översätta vinkelavstånden till skalans linjära mått.

Om ljusfläcken på skalan (jmf fig. 5) förflyttas sträckan A_{BC} får vi för små vinklar

$$\frac{A_{BC}}{L} = 2\phi_{BC} \qquad (10)$$

L - avståndet skalan-spegel

och

$$\boxed{\phi_{BC} = \frac{A_{BC}}{2L}} \qquad (10\ a)$$

Nu kan vi sammanföra ekvationerna 3a, 5, 8 och 10 a.
Resultatet blir:

$$G = \frac{\pi^2 d\ a^2\ A_{BC}}{M\ L\ T^2\ k} \qquad (11)$$

där d - 0,05 m

a - mätes med skjutmått

A_{BC} - bestäms enl. beskrivning ovan och i appendix

M - 1,5 kg

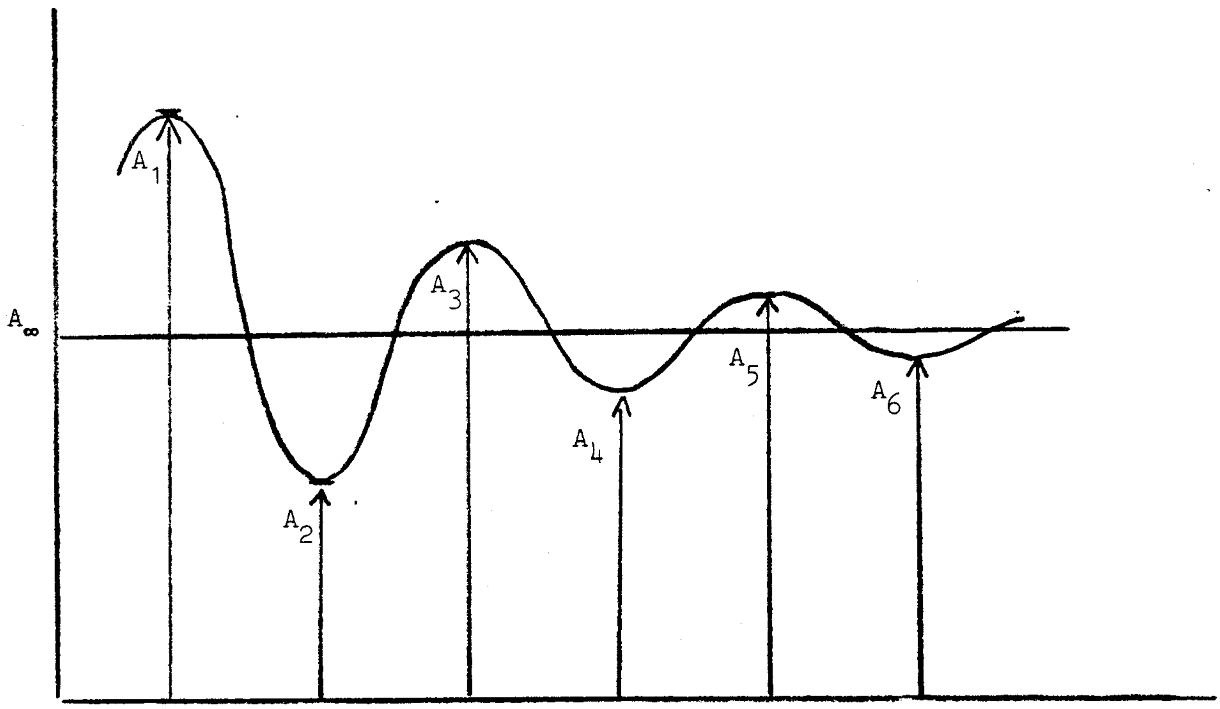
L - mätes med linjal

T - bestämes ur kurvan enligt fig. 6

k - beräknas ur ekv. 3b

GRAVITATION

Bestämning av jämviktsläget för en dämpad svängningsrörelse med konstant dämpning



där A_∞ är lika med A_{OB} respektive A_{OC}.

Enligt ekv (7) gäller att kvoten mellan två på varandra följande extremvärden är konstant, dvs

$$\frac{A_1 - A_\infty}{A_2 - A_\infty} = \frac{A_2 - A_\infty}{A_3 - A_\infty} = \ldots = \frac{A_{n-1} - A_\infty}{A_n - A_\infty} = c, \text{ där c är en konstant} < -1 \qquad \text{(A1)}$$

Enligt korresponderande addition gäller allmänt att om

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

kan detta skrivas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}$$

Omskrivning av ekv (A1) ger då

$$\frac{A_1 - A_\infty}{A_2 - A_\infty} = \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_3}$$

vilket ger $$A_\infty = \frac{A_1A_3 - A_2^2}{A_1 - 2A_2 + A_3} = \frac{A_4A_6 - A_5^2}{A_4 - 2A_5 + A_6}$$

GÖTEBORGS UNIVERSITET
Fysiska institutionen
Carl-Axel Sjöblom

1983-01-18

Instuderingsfrågor till laboration:

M3 GRAVITATION

1. Formulera gravitationslagen.
2. Beskriv Cavendishvågen i stora drag och redogör för dess främsta fördelar.
3. Vad innebär begreppet direktionsmoment?
4. Vad innebär begreppet torsionsmodul?
5. Hur bestämmer man jämviktsläget för den dämpade svängningsrörelsen?
6. Varför vrides ljusfläcken på skalan vinkeln 2Ø när spegeln vrides vinkeln Ø?
7. Bevisa formeln för korresponderande addition.
8. Skriv upp differentialekvationen för torsionsvågens svängningsrörelse.

PRIMÄRVÄRDEN

Svängningsförloppen. Jämviktsläge ..B..

tid m s	skald	t	s	t	s	t	s	t	s	t	s
0		8		16		24		32		40	
0 20											
0 40											
1		9		17		25		33		41	
1 20											
1 40											
2		10		18		26		34		42	
3		11		19		27		35		43	
4		12		20		28		36		44	
5		13		21		29		37		45	
6		14		22		30		38		46	
7		15		23		31		39		47	

Värdena inritas i diagram. A_1, ..., A_n mätes från lämplig referenslinje (t ex mm-papperets nederkant). Enligt teorin i appendix erhålles

$$A_{OB} =$$

Ur diagrammet fås också svängningstiden T_1 som avståndet mellan två på varandra följande punkter med samma fas, lämpligen skärningspunkter mellan svängningskurvan och linjen för jämviktsläget. (Utnyttja kurvan så att största möjliga noggrannhet i best. av T_1 erhålles!) Beräkning av T_1:

T_1 = sek

Jämviktsläge ..C...

tid (min)	skald	t	s	t	s	t	s	t	s	t	s
0		8		16		24		32		40	
1		9		17		25		33		41	
2		10		18		26		34		42	
3		11		19		27		35		43	
4		12		20		28		36		44	
5		13		21		29		37		45	
6		14		22		30		38		46	
7		15		23		31		39		47	

Svängningskurva, se diagram.

A_{OC} =

Beräkning av T_2:

T_2 = sek

<u>UTFÖR EN BERÄKNING AV GRAVITATIONSKONSTANTEN OCH FORMULERA RESULTAT</u>