Göteborgs universitet och Chalmers tekniska högskola
Institutionen för teoretisk fysik och mekanik
Jonas Fridén

Januari 1995
14 sidor

M2
LUFTSTRÖMNING

MÅLSÄTTNING:

Med enkla tryckmätningar undersöka stationär luftströmning

FÖRBEREDELSER:

Läs igenom hela lab-handledningen. Gå själv igenom härledningarna av Kontinuitetsvillkoret samt Bernoullis ekvation. Gör uppgifterna A1 och B2 samt planera hur du ska lägga upp mätuppgifterna!

Namn .... Kurs ....

Utförd den .... Handledare ....

Godkänd den .... av ....

1 Teori

Den teori som gås igenom beskriver stationär strömning. Med stationär strömning menas att strömningsbilden (hastighet, tryck m.m.) är tidsoberoende. Detta behöver inte innebära att inget rör sig. Tänk dig t.ex. en flod som vid två olika tidpunkter ser exakt likadan ut. Med stationär menas alltså inte statisk som ju betyder att hastigheten är noll.

Vi ska i de närmaste avsnitten ta fram några av de lagar som beskriver stationär strömning.

1.1 Strömlinjer

För att på ett enkelt sätt åskådliggöra storleken och riktningen av hastigheten i varje punkt av en fluid (ett strömmande medium) inför man begreppet strömlinjer. En strömlinje är en linje som i varje punkt är parallell med hastigheten hos mediet. Strömlinjernas täthet är ett mått på hastighetens storlek och riktningen anges med pilar på strömlinjerna. I stationär strömning är strömlinjerna tidsoberoende.

1.2 Stagnationspunkt

I en stagnationspunkt är hastigheten noll. En sådan punkt får man t.ex. om en kropp placeras i en fluid, se fig 1.

I det resonemang som följer delar vi upp hastighetsvektorn i en normalkomponent som är vinkelrät mot ytan och en tangentialkomponent som tangerar ytan. På ytan av kroppen måste normalkomponenten vara noll (det strömmar inte in något i kroppen). Längs ytan blir det en fördelning av tangentialkomponenter[1], se fig. 1. På ovansidan och undersidan strömmar mediet åt olika håll sett inifrån kroppen. Någonstans måste hastigheten byta tecken och av kontinuitetsskäl måste hastigheten vara noll precis vid teckenskiftet. I dessa punkter, som kallas stagnationspunkter, blir hela hastighetsvektorn noll, se fig 1. Motsvarande strömningsbild fås om man låter en fast kropp falla med konstant hastighet i en vätska eller en gas.

[1] För enkelhets skull försummar vi ett tunt friktionsskikt på ytan. I verkligheten byggs tangentialhastigheten upp från noll (av kontinuitetsskäl) på den verkliga ytan till ett visst värde precis utanför friktionsskiktet. Eftersom friktionsskiktet är tunt kan man på goda grunder anta att normalkomponenten är approximativt noll i hela skiktet.

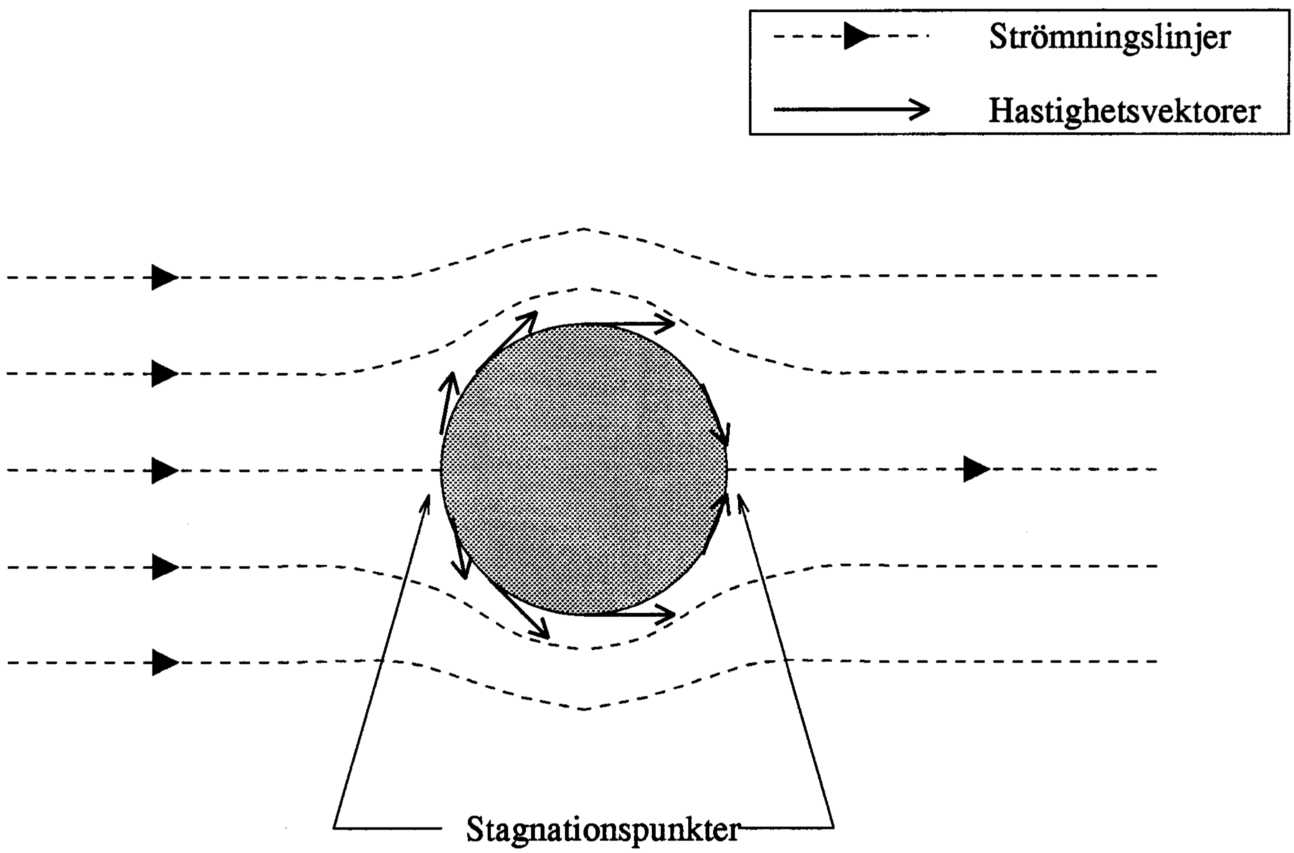

Figure 1: Stagnationspunkter för ett klot.

1.3 Kontinuitetsvillkoret

För att diskutera kontinuitetsvillkoret för en fluid införs begreppet strömrör. Tänk dig en sluten kurva som spänner ut en yta. Alla strömlinjer som utgår från kurvan bildar ett rör. Detta rör kallas för strömrör. Genom väggen, som består av strömlinjer, är flödet noll och hela flödet in och ut från röret sker via ändarna. För stationär strömning är strömrören tidsoberoende. Om vi dessutom antar att det varken bildas eller förintas partiklar i röret kan man säga följande (se fig. 2.): Samma mängd partiklar (eller massa) som strömmar in i ena änden på röret måste strömma ut i den andra änden (per tidsenhet).

Om mediet dessutom är inkompressibelt, d.v.s. densiteten är konstant,

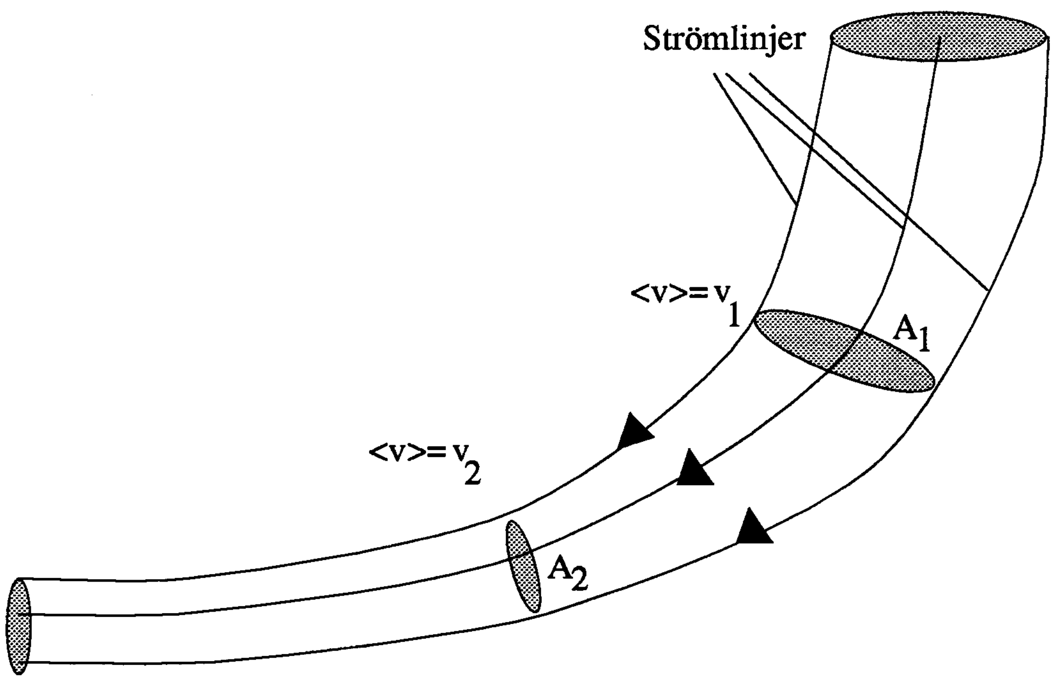

Figure 2: Strömrör. Beteckningen $< v >$ betecknar medelvärdet av hastighetens normalkomponent på respektive yta.

så kan vi säga samma sak om den in- och ut-strömmande volymen. Vidare kan tvärsnittsytorna väljas var som helst i strömröret.

Nu ska vi formulera kontinuitetsvillkoret matematiskt och tittar då på ytorna A_1 och A_2, se fig. 2. Låt v_1 och v_2 vara medelvärdet, räknad positiv i pilarnas riktning, av hastighetskomponenten vinkelrät mot ytorna A_1 respektive A_2. Betrakta röret mellan A_1 och A_2. Volymflödet in i röret vid A_1 ges av $Q_1 = A_1 v_1$ och volymflödet ut från röret vid A_2 blir $Q_2 = A_2 v_2$. Kontrollera att du förstår detta! Kontinuitetsvillkoret blir $Q_1 = Q_2$ eller

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{1}$$

1.4 Bernoullis ekvation (1738)

Bernoullis ekvation är giltig för stationärt flöde i en inkompressibel fluid. De krafter som påverkar strömningen antas endast härröra från gravitation och tryck. Den inre friktionen försummas och man talar om friktionsfritt medium och friktionsfri strömning.

För att härleda Bernoullis ekvation använder vi Newtons andra lag

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2}$$

och summerar upp bidragen från gravitations- och tryck-krafter.

Betrakta ett vätske- eller gas-element som är utsträckt längs en strömlinje, se fig 3.

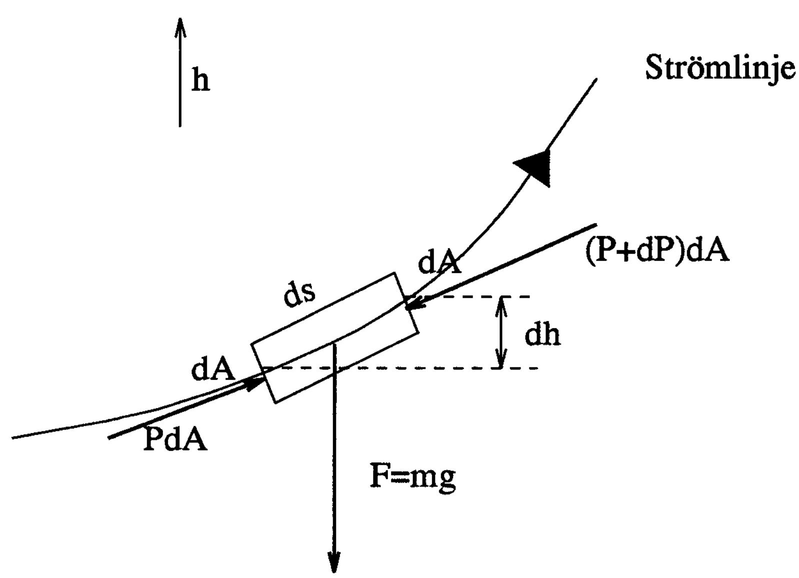

Figure 3: Volymelementet i härledningen av Bernoullis ekvation.

Låt a_l beteckna accelerationen längs strömröret. Genom att använda likformiga trianglar kan man skriva tyngdkraftens komponent längs strömlinjen som $-mg(\mathrm{d}h/\mathrm{d}s)$. Newtons andra lag för komponenten längs strömlinjen ger nu

$$p\mathrm{d}A - (p + \mathrm{d}p)\mathrm{d}A - mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = ma_l \tag{3}$$

Använd nu $m = \rho \mathrm{d}s\mathrm{d}A$ samt $a_l = \mathrm{d}(v^2/2)/\mathrm{d}s$. Vi kan nu eliminera areaelementet $\mathrm{d}a$ och skriva om ekvationen på formen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\rho}{2}v^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(p + \rho g h\right) \tag{4}$$

I det sista steget utnyttjas att fluiden är inkompressibel d.v.s. ρ är en konstant. En integrering längs strömlinjen ger slutligen Bernoullis ekvation

$$p_t = p + \rho g h + \frac{\rho}{2}v^2 \tag{5}$$

där p_t är en integrationskonstant. Eftersom p är ett tryck måste även de andra termerna vara tryck. Termerna i högerledet kallas för:

Statiskt tryck	:	$p_s = p$
Höjdtryck	:	$p_h = \rho g h$
Dynamiskt tryck	:	$p_d = \rho v^2/2$

Summan av dessa tryck p_t kallas för totaltryck. Bernoullis ekvation säger alltså att det totala trycket är konstant längs en strömlinje. Observera att Bernoullis ekvation endast gäller längs en strömlinje d.v.s i allmänhet är p_t olika längs olika strömlinjer.

Den viktigaste konsekvensen av Bernoullis ekvation är att när hastigheten ökar så ökar det dynamiska trycket p_d. Om höjdtrycket är konstant (horisontell strömning) så måste det statiska trycket minska. Denna effekt kallas för Bernoullis princip och förklarar t.ex. varför man kan flyga med flygplan, kryssa med en segelbåt, spela trumpet (förutsatt att man övar) och mycket mera.

2 Mätning av tryck.

Vi ska nu gå igenom hur man mäter totalt, statiskt samt dynamiskt tryck i en fluid. Att mäta höjdtryck innebär i princip endast att mäta höjden och densiteten. I fortsättningen tittar vi på horisontell strömning och definierar $p_h = 0$. Bernoullis ekvation blir då

$$p_t = p_s + p_d \tag{6}$$

Vi ska i de följande sektionerna gå igenom hur man mäter dessa tre tryck (p_t, p_s och p_d).

När man mäter på en fluid är det svårt att undvika att störa det medium man vill mäta på. Å andra sidan måste vi på något sätt störa strömningsbilden för att kunna tillgodogöra oss information om den.

För att diskutera detta och principerna bakom olika sorters tryckmätning inför vi följande beteckningar. Låt p_t^o, p_s^o och p_d^o vara trycken i det ostörda mediet och p_t^m, p_s^m och p_d^m trycken i mätpunkten. I samtliga fall är det p_s^m som mätinstrumentet (en manometer) registrerar. Trots detta kan vi mäta alla tre trycken p_t^o, p_s^o och p_d^o med tillfredsställande nogrannhet.

2.1 Pitotrör

I ett Pitotrör använder man sig av en stagnationspunkt för att mäta det totala trycket.

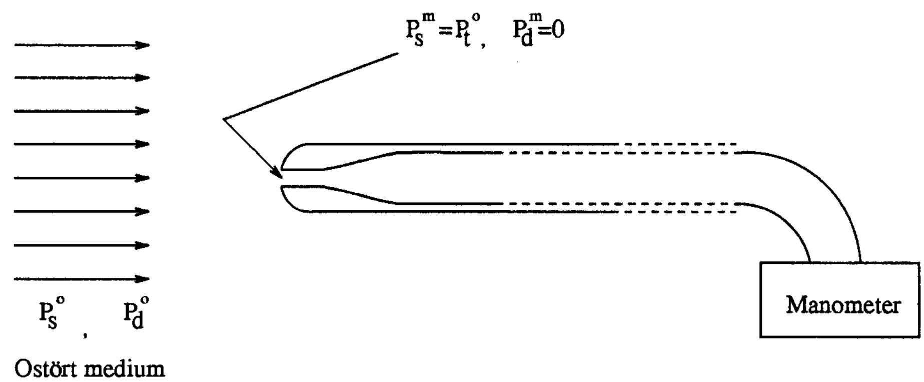

Figure 4: Pitotrör.

Själva Pitotröret är ett rör som vid mätning placeras med mynningen riktad mot strömnlinjerna. Rörets andra ände kopplas till en manometer som registrerar det statiska trycket i röret. Inuti röret står mediet stilla och det statiska trycket är alltså konstant. Mätpunkten är i detta fall den öppna mynningen på röret och manometern registrerar trycket p_s^m. Av symmetriskäl (och kontinuitetsskäl) är mätpunkten en stagnationspunkt d.v.s. $p_d^m = 0$. Om dimensionerna på Pitotröret är små är trycken en bit från Pitotröret desamma som i det ostörda mediet. Här gäller alltså $p_t = p_t^o$. Betrakta nu en strömlinje som slutar i stagnationspunkten. Totala trycket längs denna linje är p_t^o och i stagnationspunkten gäller $p_t^m (= p_s^m) = p_t^o$. Manometern registrerar således indirekt det totala trycket $p_t^o (= p_s^m)$.

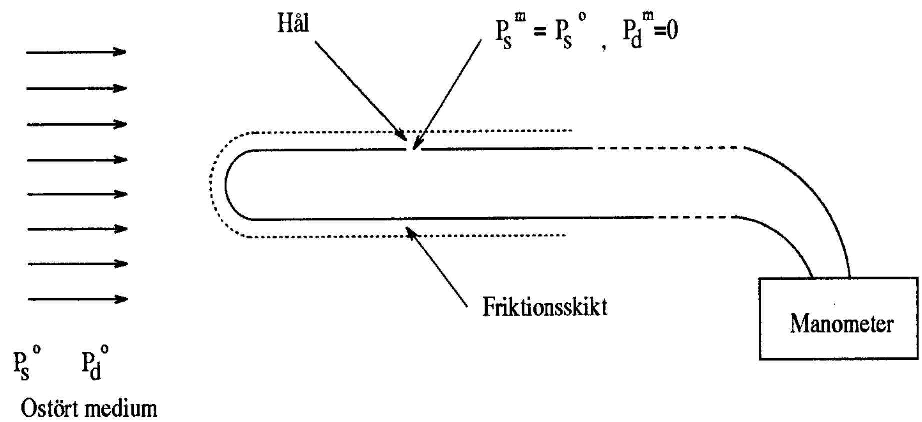

Figure 5: Trycksond.

2.2 Trycksond

För att mäta statiskt tryck använder man ett liknande rör men nu med ett litet hål (ca 0,5 mm i diameter) i sidan på röret.

Hastigheten längs röret måste vara kontinuerlig. Därför är hastigheten precis vid hålet noll. Man får i själva verket ett tunt skikt runt röret där mediet p.g.a. friktion bromsas ned. I detta gränsskikt gäller alltså inte Bernoullis ekvation (d.v.s. totala trycket är ej konstant). Enligt erfarenhet visar det sig att friktionsskiktet oftast är så tunt att det statiska trycket ej sjunker, d.v.s. $p_s^o = p_s^m$. Eftersom manometern registrerar p_s^m kan man alltså mäta det statiska trycket i det ostörda mediet.

2.3 Prandtlrör

Med ett Prandtlrör mäter man det dynamiska trycket. Ett Prandtlrör är inget annat än en kombination av ett Pitotrör och en trycksond. Dessa används samtidigt och man registrerar skillnaden mella det totala trycket och det statiska trycket och erhåller på så vis det dynamiska trycket som $p_d^o = p_t^o - p_s^o$. Notera att denna tolkning av tryckskillnaden förutsätter att Bernoullis ekvation beskriver strömningen.

3 Avvikelser

Vi ska i denna laboration pröva giltigheten av Bernoullis ekvation. Det är viktigt att vi då kommer ihåg förutsättningarna. En effekt som alltid är närvarande och som överhuvudtaget möjliggör mätning (se avsnittet om trycksond) är friktion. Ett annat fenomen är virvelbildning eller turbulens. Ingen av dessa fenomen beskrivs av Bernoullis ekvation. Hur påverkar detta mätningarna?

Vid turbulens fås ej längre stationär strömning d.v.s. de uppmätta trycken varierar med tiden. För att diskutera hur friktionsförluster och andra energiförluster påverkar Bernoullis ekvation är det belysande att göra en "energitolkning". Notera att tryck har dimensionen energi per volymsenhet. För en ideal gas kan man tolka de olika termerna i Bernoullis ekvation enligt följande

Tryck	Typ av energi (pervolymsenhet)	Orsak
p_s	Inre energi	Repulsion mellan atomerna
p_d	Rörelseenergi	Atomernas translationsrörelse
p_h	Lägesenergi	Gravitation

Det totala trycket är summan av dessa energier per volymsenhet. Om man har förluster p.g.a. friktion minskar totala trycket (energi per volymsenhet) längs en strömlinje. Turbulens gör att det går åt energi till att bilda virvlar och slutligen värme. Följden blir att det totala trycket minskar. Eventuella avvikelser från Bernoullis ekvation kan vi alltså tolka som energiförluster eller att det går åt energi till att generera fenomen som inte beskrivs av ekvationen. Notera att avvikelser alltid leder till att det totala trycket avtar längs en strömlinje.

Även om man ofta får avvikelser från Bernoullis ekvation kan det vara av intresse att se om ekvationen beskriver verkligheten någorlunda bra eller om den är helt felaktig. En ekvation som gäller "ganska bra" kan ju vara användbar som understöd till vissa resonemang som t.ex. : När hastigheten i en fluid ökar minskar det statiska trycket.

3.1 Inkompressibilitet för luft

När vi härledde kontinuitetsvillkoret och Bernoullis ekvation använde vi oss av att mediet var inkompressibelt. Det visar sig att detta gäller för luft vid rimliga hastigheter. Hur kan detta komma sig? Orsaken till detta är att tryckvariationerna under vissa omständigheter är för små för att orsaka någon nämnvärd kompression av luften.

För en ideal gas gäller att densiteten ρ är proportionell mot p_s. Om vi kan godta densitetsvariationer på 1% motsvarar det en tryckvariation på 1%, d.v.s. $\Delta p_s = 0.01$ atm. $= 10^3\,\mathrm{N/m^2}$. Detta tryckfall motsvarar att man accelererar luften till en hastighet som ges av $\Delta p_s = \rho v^2/2$. Densiteten för luft är $\rho = 1.3\,\mathrm{kg/m^3}$ vilket ger $v \approx 40$ m/s. För hastigheter upp till 40 m/s kan alltså luft anses vara inkompressibelt.

En annan uppskattning ges av hastigheten för en elastisk deformations (ljudvåg) utbredning i mediet. Vid ljudhastigheten deformeras mediet elastiskt och är således helt kompressibelt. Som tumregel kan man säga att en fluid är inkompressibelt vid hastigheter som är små i förhållande till ljudhastigheten i mediet. I praktiken visar det sig att luft är inkompressibelt upp till 70 m/s.

Mätuppgifter

Tänk igenom i förväg vilka mätningar som du behöver göra så spar du tid! Glöm inte att redovisa samtliga mätresultat. I slutredovisningen ska även ingå kommentarer till erhållna resultat.

A Venturiröret

Den absolut vanligaste sättet att mäta hastigheten av en fluid i ett rör är att använda sig av ett Venturirör. Ett Venturirör är ett rör med en insnörning som placeras på röret där man vill bestämma hastigheten. Tekniken baseras på Bernoullis ekvation och kontinuitetsvillkoret. I Venturiröret kommer strömlinjerna att komprimeras och hastigheten att öka. Enligt Bernoullis ekvation kommer därmed det statiska trycket att sjunka, se fig.6. Genom att mäta tryckfallet Δp kan man således, via en enkel formel, mäta hastigheten v_1 i röret.

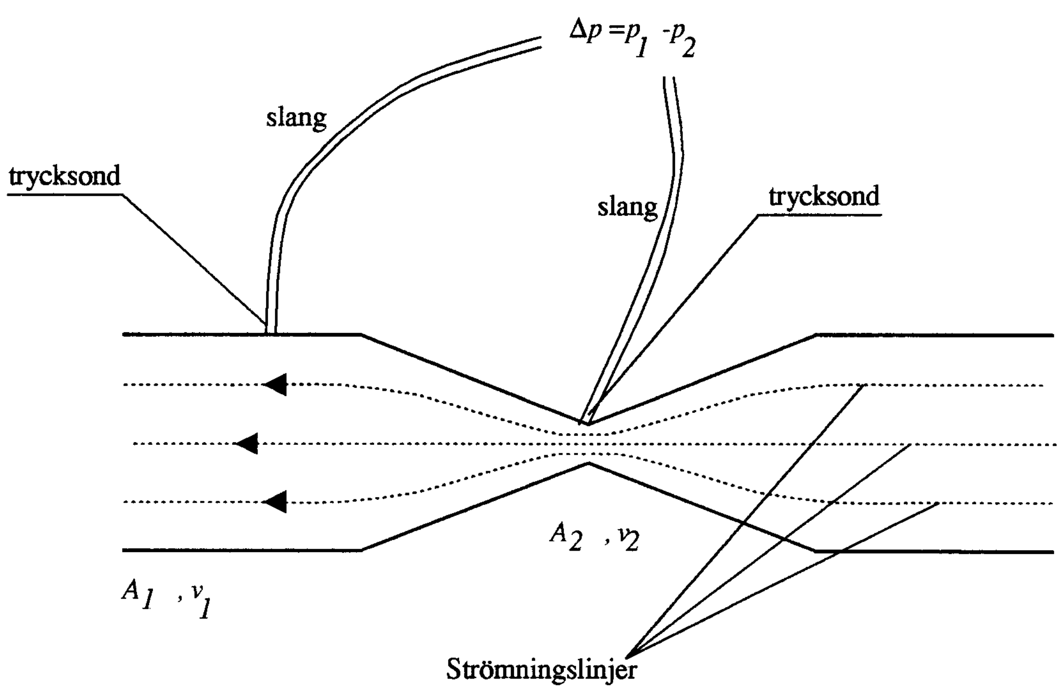

Figure 6: Venturirör.

Uppgift A1. *Härled denna formel på formen*

$$v_1 = k\sqrt{\Delta p} \tag{7}$$

Identifiera konstanten k *uttryckt i densiteten* ρ *och kvoten mellan areorna* A_1 *och* A_2.

I de följande mätningarna ska du använda dig av ett Venturirör med en öppen ända och den andra änden ansluten till en fläkt. Ett antal mätpunkter är fördelade längs Venturiröret.

Uppgift A2. *Kontrollera (genom mätningar) giltigheten av Bernoullis ekvation i Venturiröret. Ledning: Ställ in fläkthastigheten enligt muntlig instruktion. Mät dynamiskt tryck i mynningen. Beräkna sedan det dynamiska trycket vid varje mätpunkt på röret. Mät till slut det statiska trycket i varje mätpunkt. Redovisa* p_d, p_s *och* p_t *i en graf.*

Uppgift A3. *Välj ut två mätpunkter. Bestäm experimentellt (med felmarginal) konstanten* k *i ovanstående formel.*

B Vingprofil

Denna uppgift syftar till att klargöra vilka krafter som får en flygplansvinge att lyfta.

I varje punkt på en omströmmad kropp verkar dels en normalkraft p.g.a. trycket och en tangentialkraft p.g.a. friktionen. Krafterna på ett infinitesimalt areaelement betecknas $d\vec{F}_d$ respektive $d\vec{F}_f$, se figur 8. Summan av dessa krafter integrerade över vingens area ger den totala kraften $\vec{F}$. Den vertikala komponenten av $\vec{F}$ är lyftkraften som gör att kroppen lyfter eller sjunker. Om kroppen är symmetrisk fås t.ex. ingen vertikalkomponent alls.

En vinge är konstruerad så att krökningen (kurvaturen) är större på översidan än på undersidan. Denna assymetri leder till att strömlinjerna pressas ihop på ovansidan varvid hastigheten ökar. Enligt Bernoullis princip minskar trycket på ovansidan vilket ger en lyftkraft. På undersidan bromsas luften upp och trycket ökar vilket också ger en lyftkraft.

Uppgift B1. *Ställ in fläkthastighet, position och vinkel (max* $10°$*) på vingen så att lyftkraften blir ca* $1N$. *Mät lyftkraften med balansvåg. Mät sedan trycket på översidan samt undersidan och redovisa grafiskt som funktioner av avståndet från vingens framkant längs den plana undersidan. Jämför resultaten från mätningen med balansvåg med resultaten från tryckmätningen.*

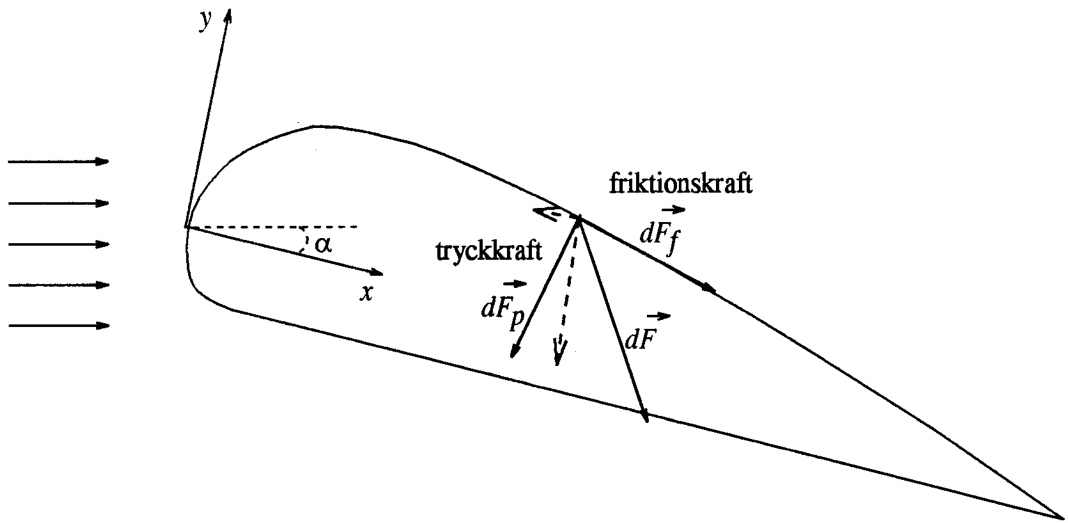

Figure 7: Vingprofil.

Ledning: Låt x vara en koordinat längs vingens undersida. Sönderdela tryckkraften $d\vec{F}_p$ i x- och y-komponenter (streckade vektorer i figur 8). Summera upp y-komponenterna över både över och undersida. Resultatet blir

$$F_{p,y} = B \int_0^L \Delta p(x) \mathrm{d}x \tag{8}$$

där B och L är bredden respektive längden på undersidan av vingen och Δp är tryckskillnaden mellan undersidan och översidan.

Uppgift B2. *Härled formel (8).*

C Luftmotstånd

Kraften F på en kropp p.g.a. luftmotstånd kan relateras till det dynamiska trycket p_d via uttrycket

$$F = A_e p_d \tag{9}$$

Här är A_e den effektiva arean, jmfr motsvarande uttryck för en kontaktkraft mellan två stela kroppar. För att få ett kvalitativt mått på luftmotsåndet definierar man motståndskoefficienten c genom

$$A_e = cA \tag{10}$$

där A är den projicerade arean vinkelrätt mot strömningen. Storleken på den dimensionslösa konstanten c beror både på formen av kroppen (normalkrafter vid ytan) och materialet hos kroppen (tangentiella friktionskrafter).

Uppgift C. *Mät upp c för sex olika profiler enligt nedanstående figur. Ställ in fläkten på maximal styrka och placera profilerna ca. 30 cm från mynningen på fläkten.*

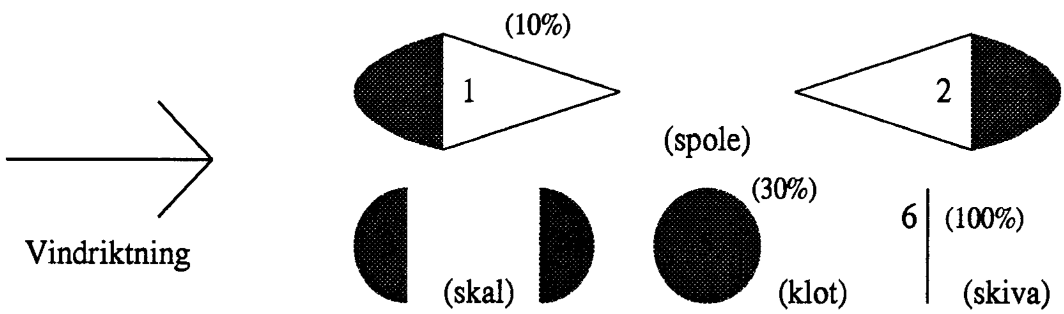

Figure 8: Profiler för mätning av luftmotstånd. Procenttalen anger ungefärligt relativa luftmotståndet för några profiler.

D Hus i storm

Uppgift D. *Mät upp tryckprofilen över ett hustak. Varför blåser taket av vid en storm? Vid vilka punkter har man kraftiga tryckfall? Vilka paralleller finns med flygplansvingen?*

E Pingpongboll på luftpelare

Med lämplig dammsugare kan man få en pingpongboll att inta ett stabilt jämviktsläge på en uppåtgående luftström.

Uppgift E. *Förklara hur detta är möjligt. I mån av tid och dammsugare försök att utföra konststycket.*

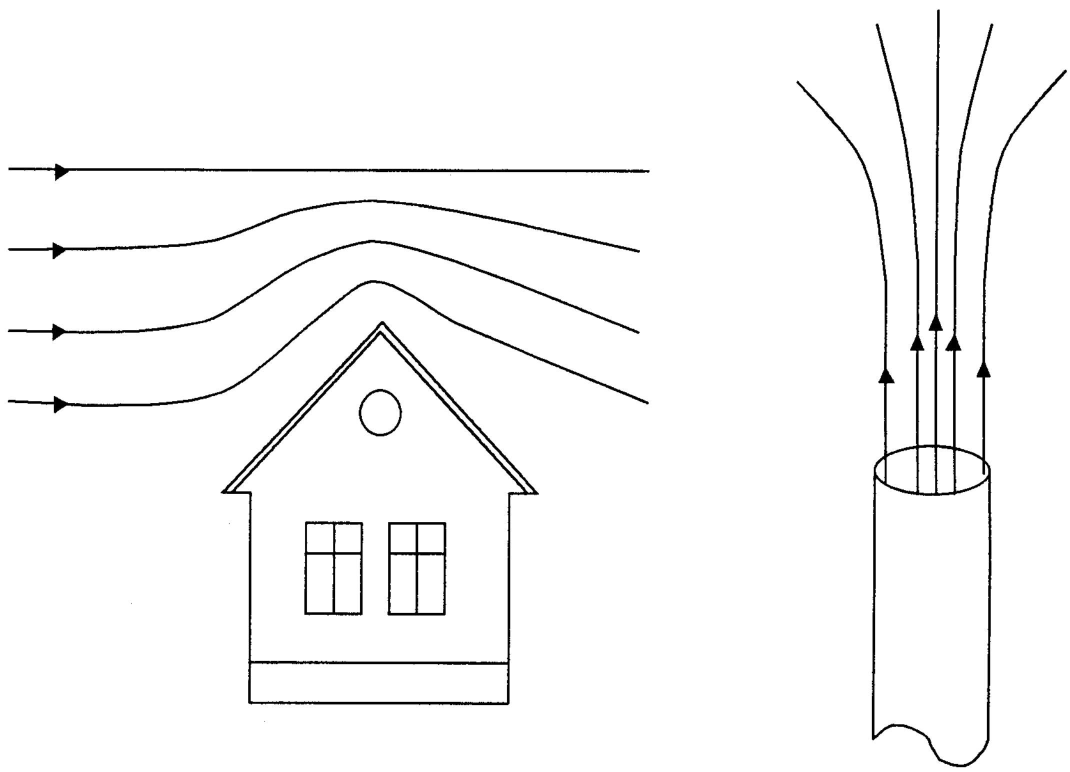

Figure 9: Typiska strömlinjer för hus i storm respektive utsuget på en dammsugare.