Problem, Sonja Kovalevsky-dagarna 2006

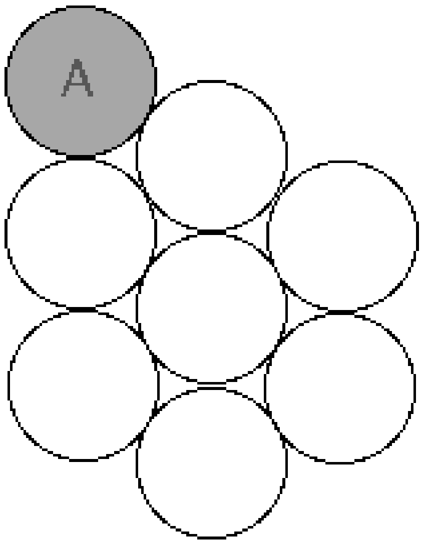
ANVISNINGAR

- Lös uppgifterna enskilt eller i grupp (om högst 4 personer).
- Lämna in högst en uppgift av vardera svårighetsgrad.
- Glöm inte att skriva gruppmedlemmarnas namn på varje lösningssida.
- Lösningarna bedöms efter kvalitet snarare än kvantitet.
- Lösningarna skall lämnas in senast 10:30 lördag morgon vid entren till MVF.

1 Lättare

Problem 1. *För vilka positiva heltal N gäller $(1+2+\cdots+N)^2 = 1^2+2^2+\cdots+N^2$?*

Problem 2. *Antag att vi har 7 st däck med radie r grupperade i en 6-hörning. Hur många varv måste man rulla däcket märkt med ett A, som också har radie r (se bild nedan), för att nå ett helt varv runt 6-hörningen?*



Problem 3. *Visa att $n^3 - n$ är delbart med 6 för varje heltal n.*

Problem 4. *En snigel skall ta sig ifrån punkten $(2, -1)$ till punkten $(-1, 3)$ i talplanet. Snigeln rör sig med hastigheten 2 förutom i första kvadranten där han rör sig med hastigheten 1. Hur lång tid tar det för snigeln?*

Problem 5. *Sju barn skall dela på 20 mynt. Visa att två av barnen får samma antal mynt hur de än fördelar mynten.*

2 Medelsvåra

Problem 6. *Låt* $\{a, a+b, a+2b, \ldots\}$ *vara en aritmetisk följd. Visa att om det finns en kvadrat av ett heltal i följden så finns det oändligt många kvadrater i följden.*

Problem 7. *Visa att arean på en* n*-hörning inskriven i en cirkel är maximal då* n*-hörningen är liksidig.*

Problem 8. *Visa att*

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

för alla heltal $n \geq 1$ *(*$n!$ *är produkten av de* n *första heltalen och utläses 'n fakultet').*

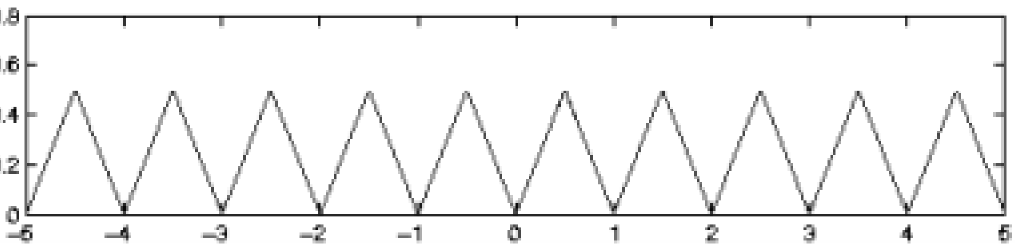
Problem 9. *På hur många olika sätt kan ni konstruera ordet KOVALEVSKY genom att gå en sammanhängande väg (t.ex som de fetstilta bokstäverna) i nedanstående figur.*

K
KOK
KOVOK
KOVAVOK
KOVALAVO**K**
KOVALELA**VO**K
KOVALEVE**LA**VOK
KOVALEVS**VE**LAVOK
KOVALEVS**KS**VELAVOK
KOVALEVSK**Y**KSVELAVOK

Problem 10. *Finn alla heltalslösningar till ekvationen* $xy = 2x - y$.

3 Svårare

Problem 11. *Låt* f *vara en sågtandsfunktion definerad som* $f(x) = x$ *i intervallet* $0 \leq x < \frac{1}{2}$ *och* $f(x) = 1 - x$ *i intervallet* $\frac{1}{2} \leq x < 1$ *och som sedan upprepar sig periodiskt.*



Visa att $g(x) = f(x) + f(ax)$ *är periodisk om och endast om* a *är ett rationellt tal.*

Problem 12. *Antag att vi har ett oändligt regelbundet rutnät som består av kvadratiska rutor med sidlängd* 1. *Visa att vi för varje heltal* n *kan rita en cirkel som skär minst* n *stycken hörn på rutnätet.*

Problem 13. *Visa att* $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ *inte är ett heltal om* $n > 1$.

Problem 14. *En triangel har sidorna* a, b *och* c. *Om* γ *är vinkeln som står mot sidan* c, *visa att* $c \geq (a+b) \cdot \sin(\gamma/2)$.

Problem 15. *Låt* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *vara icke-negativa reella tal. Visa att*

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n \leq s^2/4,$$

där $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.