# Lösningsförslag till problem från Sonja-Kovalevsky-dagarna 2006, Göteborg

Jag vill först och främst uppmana läsaren att ha papper och penna till hands och aktivt sätta sig in i lösningarna, och själv fylla i detaljer som fattas. Dessutom kan det förekomma ord som vissa läsare kanske inte är bekanta med. I dessa fall rör det sig oftast inte om några komplicerade begrepp, och läsaren hänvisas att söka upp innebörden på www.wikipedia.com eller www.mathworld.com. Ord som kan vara värda att slå upp kommer att markeras med fet stil. Jag vill också nämna att när man möter ett matematiskt problem av en typ man inte har stött på tidigare förundras man ofta över hur någon har lyckats lösa det. Man blir också ofta förvånad över hur mycket bättre man blir på problemlösning då ens erfarenhet växer, och saker som förut verkade omöjliga plötsligt kan te sig väldigt naturligt. Det är denna känsla som gör matematik värd att syssla med, så ha alltid tålamod, problemlösning är en övningssak. Slutligen bör det påpekas att svårighetsgraden på ett problem är väldigt individuell och även svårbedömd. Vissa uppgifter visade sig vara svårare än väntat.

**Problem 1.** *Det vänstra ledet (V.L.) är en produkt av två faktorer som är summor av flera termer. För att beräkna denna produkt kan man använda sig av den* ***distributiva lagen (the distributive law)****. Denna lag använder alla antingen medvetet eller omedvetet väldigt ofta. I detta fall använder man sig av den upprepade gånger. Om $N > 1$ blir resultatet att V.L. innehåller alla termer som förekommer i H.L. och dessutom fler termer som alla är positiva. Alltså är V.L. strikt större än H.L. i alla fall förutom $N = 1$ då V.L. $=$ H.L. $= 1$.*
***Svar:*** *$N = 1$.*

**Problem 2.** *Jag ber om ursäkt att figur saknas, men jag ger här instruktioner för hur figuren ska ritas, vilket förhoppningsvis är en bra övning. Då däcket rullas runt de sju däcken kommer det att passera vissa nyckelpositioner. Dels kommer den vara i en sådana positioner att det tangerar två av däcken, och dels i positioner där dess medel punkt ligger på en linje som även passerar genom medelpunkterna till tre andra däck. Rita själv en figur för att se var dessa positioner är. Strategin är att bestämma hur mycket däcket roterar då det passerar från en position av den första typen till nästa position av den andra typen. Den totala rotationen kommer då att erhållas genom att multiplicera med 12, som är antalet förflyttningar av denna typ.*
*Vi väljer t.ex. att studera vad som händer då däcket flyttas från att vara rakt under de sju däcken till tangera det understa (låt det kallas A) samt däcket strax till höger om*

*det understa (B). Låt också det mittersta däcket kallas M. Man kan fylla på figuren med cirklar så att det understa däcket befinner sig i mitten av en hexagon. Förflyttningen är alltså identisk med att rulla A så att den fullständigt överlappar B. Den strecka på M som berörs av A under processen måste vara lika lång som streckan på A som berörs av M om man antar att däcken inte glider mot varandra. Vi betecknar tangeringspunkten mellan två cirklar med (,). Eftersom avståndet mellan alla tangeringspunkter är samma kommer (A,B) att förflyttas till (B,M). Rita nu en pil från A:s medelpunkt till (A,B) och en från B:s medelpunkt till (B,M). Genom att även rita den liksidiga triangeln genom med hörn i de tre cirklarnas medelpunkter kan man inse att vinkeln mellan pilarna är 120 grader. Genom att rita alla positioner ser man att det är 12 förflyttningar som skall göras. Alltså vrids cirkeln 4 varv kring sin egen axel.* [1] ***Svar: 4 varv***

**Problem 3.** *För alla heltal n gäller att* $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$*. Detta är alltså en produkt av tre på varandra följande tal. Varje tal har rest 0,1 eller 2 vid division med tre. Tal som har dessa rester kan alltid skrivas som* $3k$*,* $3k + 1$ *respektive* $3k + 2$*. Oavsett på vilken form talet n är så visar en enkel kontroll att ett av de tre talen har rest 0 (dvs är delbart med 3). Detta visar att produkten av 3 konsekutiva heltal är delbar med tre. Ur samma resonemang tillämpat på division med 2 ger att produkten av två konsekutiva tal är delbar med 2.* $n^3 - n$ *är delbart med 2 och 3, alltså även med 6, eftersom 2 och 3 är* ***relativt prima (relatively prime).***

**Problem 4.** *Låt snigeln börja i punkt B och sluta i punkt S. Om den någon gång kommer till en punkt P som ligger strikt i tredje kvadranten så blir den bästa resan att först åka raka vägen till P och sedan raka vägen till S, vilket beror på att den kortaste streckan mellan två punkter är en rät linje. Detta är dock inte optimalt, för i så fall hade det varit bättre att åka genom origo, vilket lämnas åt läsaren att kontrollera. Om snigeln någon gång når en punkt Q strikt i den första kvadranten så måste den någon gång anlänt till denna kvadrant och någon gång måste den lämna den. Det är klart att den måste ha anlänt vid x-axeln, för hade den kommit in från y-axeln så hade det inte varit någon mening att ta sig in i den första, för då hade den kunnat krypa raka vägen till S. Det är inte heller någon bra idé att lämna den första kvadranten vid x-axeln, ty det hade gått snabbare att förflytta sig bara längst med x-axeln. Alltså har den förflyttat sig längst en rak sträcka från en punkt på x-axeln till en punkt på y-axeln. Denna strecka är hypotenusan i en rätvinklig triangel med sitt tredje hörn i origo. Låt sidorna vara a,b och c. Tiden det tar att gå längst med hypotenusan är* $2c$*. Går man istället längst med de två kateterna blir tiden* $a + b$*. Eftersom hypotenusan alltid är den längsta sidan får vi* $2c > a + b$*. Det går alltså snabbare att gå längst axlarna. Detta betyder att vi måste gå igenom origo, men eftersom vi tar oss från B till origo* $(O)$ *och sedan till S går det snabbast går längst de raka sträckorna* $\overline{BO}$ *och* $\overline{OS}$*. Man kan emellertid intuitivt dra slutsatsen att det är optimalt att gå genom origo. Hade man spännt en tråd mellan de start- och slutpunkt hade den med säkerhet dragits mot hörnet.*
***Svar: Det tar*** $(\sqrt{5} + \sqrt{10})/2$ ***tidsenheter***

[1] Ett vanligt svar är 2 varv, men det är bara beröringsstreckan som mostsvarar två varv.

**Problem 5.** *Vi använder oss av* ***reductio ad absurdum****, dvs motsägelsebevis. Antag att alla barn får olika belopp. Ordna dem därefter i storleksordning. Om det första talet är n så är nästa tal minst n+1. Det tredje talet är större än det andra. Alltså är det större än n+2. Och så vidare. Det sista talet är alltså minst n+6. Summan av dessa 7 tal är minst* $7n + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \geq 21 > 20$. *Detta är vår motsägelse och beviset är därför klart.*

**Problem 6.** *I denna uppgift glömde vi att nämna att a och b är heltal. Metoden är helt rakt på sak. Vi skriver allt vi vet, och det vi inte vet sätter vi nya variabelnamn på:*

$$\text{Vi vet:} \qquad a + kb = n^2 \tag{1}$$

$$\text{Vi vill ha:} \qquad a + lb = m^2 \tag{2}$$

*Genom att subtrahera (1) från (2) får vi*

$$(l - k)b = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) \tag{3}$$

*Om vi kan välja m och l som satisfierar denna ekvation, så får vi (2) genom att 'gå tillbaka' , dvs att addera (1) till (3). Detta kan vi göra t.ex. genom att se till att* $m - n = b$ *och därefter* $l - k = m + n$. *Dvs.* $m = n + b$ *och* $l = k + m + n$, *vilket är i sin ordning. Vi har nu fått fram en ny kvadrat ur följden och genom att upprepa detta oändligt många gånger får vi en oändlig följd av kvadrater. Dessa är distinkta eftersom det är klart att* $l > k$, *vilket medför att varje kvadrat är strikt större än den föregående.*

**Problem 7.** *Vi gör ytterligare ett motsägelsebevis genom att anta att den liksidiga n-hörningen inte har maximal area, dvs. att en icke-liksidig n-hörning har större area. Vi utgår ifrån att det finns en n-hörning med maximal[2] area, och vi ska nu härleda en motsägelse genom att modifiera den lite så att vi får en ännu större area, vilket är omöjligt eftersom inget kan vara större än maximum. Eftersom n-hörningen inte är liksidig finns det en punkt som inte ligger precis i mitten av sina grannar (vinkelmässigt). Denna punkt tillsammans med sina grannar bildar en triangel. Genom att rita denna figur ser man att genom att flytta punkten så att den faktiskt hamnar precis i mitten av sina grannar så ändras bara triangeln och ingen annan del av n-hörningen. Arean av triangeln är halva basen multiplicerad med höjden. Det är bara höjden som ändras, och denna är som störst då punkten är i mitten av grannarna. Om inte detta känns helt självklart, så blir det kanske tydligare om man roterar figuren (vilket inte påverkar arean) så att de två grannpunkterna är på samma höjd. Då ser man att den mittersta punkten hamnar högst då den är centrerad.* [3]

---

[2] Det finns mängder som saknar ett maximalt element. T.ex. mängden av alla negativa tal. I detta fall finns dock en n-hörning med maximal area. Beviset en kombination av följande fakta: Kontinuerliga funktioner på **kompakta (compact)** mängder antar sitt maximala värde i någon punkt. Cirkeln är kompakt. En **kartesisk produkt (cartesian product)** av mängder är kompakt på grund av **Tychonoff's** sats. Arean är en funktion på den kartesiska produkten av n cirklar.
Dessa begrepp ingår i en typisk kurs i topologi som brukar ges i tredje eller fjärde året av en utbildning i matematik.

[3] Det är ganska anmärkningsvärt att vi tack vare motsägelsebeviset slapp jämföra en godtycklig icke-liksidig n-hörning med den liksidiga. Detta hade varit mycket mer komplicerat eftersom vi hade haft ett optimeringsproblem i n variabler. Nu klarade vi oss med att jämföra med en 'lite mer' liksidig n-hörning, vilket var ett optimeringsproblem i en variabel (t.ex. höjden).

**Problem 8.** *Vi börjar med ett induktionsbevis. Fallet $n = 1$ är uppenbart. Vi antar att ekvationen gäller för $n = k$ och ska vi ska visa att den även gäller för $n = k + 1$. Vi utgår ifrån V.L:*

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (n+1) \cdot (n+1)! &= \\ = [1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!] + (n+1) \cdot (n+1)! &= \\ = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! &= \\ = (n+2) \cdot (n+1)! - 1 &= \\ = (n+2)! - 1 & \end{aligned}$$

*Vilket avslutar induktionen, eftersom dettar är H.L. Man kan också bevisa påståendet genom att observera att det är en* ***teleskoperande*** *serie eftersom $k \cdot k! = (k+1)! - k!$. Då följer det direkt.*

**Problem 9.** *Varje ordkombination slutar på bokstaven Y. Vi börjar med att räkna antalet kombinationer där KOVALEVSKY bara ligger i den högra delen av figuren. Den andra bokstaven från slutet kan antingen vara ovanför eller till höger om Y. Allmänt gäller att varje bokstav kan vara till ovanför eller till höger om den föregående, och båda alternativ är möjliga oberoende av hur de tidigare bokstäverna är konfigurerade. Y är fix, men för de övriga kan alltså finnas på två olika sätt. Alltså finns det $2^9$ möjligheter. Om vi multiplicerar detta med 2 så får det totala antalet kombinationer. Men nu har jag gjort fel! Jag har räknat den lodräta KOVALEVSKY två gånger. Alltså är svaret ...*
***Svar:*** $2^{10} - 1$

**Problem 10.** *Efter en enkel omskrivning får vi $(x + 1) \cdot y = 2x$. Vi skiljer på tre fall:*

1. $x = 0$: *Detta medför $y = 0$*
2. $x > 0$: *Om $y \geq 2$ blir V.L. för stort, så den den enda möjligheten är $y = 1$, vilket ger $x = 1$.*
3. $x < 0$: *Vi kan utesluta att $y$ är $0, 1,$ eller 2, genom att stoppa in dessa värden och se vad $x$ blir. $y$ kan inte heller vara negativt, för då måste $x + 1$ vara positivt (och nollskilt). Alltså är $y \geq 3$, dvs $\frac{2x}{x+1} \geq 3$, vilket ger att $x \geq -3$. Fallen $x = -3$ och $x = -2$ ger ytterligare två lösningar.*

***Svar: Lösningarna är*** $(0, 0), (1, 1), (-2, 4), (-3, 3)$

**Problem 11.** *Om $g$ är periodisk så finns det $x \neq 0$ så att $g(x) = 0$. Eftersom $f$ är positiv får vi då att $f(x) = f(ax) = 0$, men $f$ har bara nollställen i heltalspunkter. Alltså är $x = n$ ett heltal, och vi har $f(an) = 0$, vilket leder till att även $an$ är ett heltal: m. a är rationellt eftersom $a = \frac{m}{n}$.*
*Antag nu omvänt att $a = m/n$. $g$ är då periodisk med period $n$, vilket visas genom följande kalkyl:*

$$g(x + n) = f(x + n) + f(ax + m) = f(x) + f(ax) = g(x)$$

*I det första steget användes $am = n$, och i det andra att $f$ har period 1 så att $f(x+k) = f(x)$ för alla heltal $k$.*

**Problem 12.** *Beviset bygger på två idéer som vi visar nedan. Den ena är att är att det finns en oändlig mängd rätvinkliga trianglar med heltalssidor så att inga två är likformiga. Den andra idén är att om vi har n stycken trianglar med de givna egenskaperna så kan vi skala om dem så att alla har samma hypotenusa. Det görs genom att skala upp varje triangel med produkten av de $n-1$ övriga trianglarnas hypotenusor. Alla trianglar kommer då att ha en hypotenusa som är produkten av de n ursprungliga hypotenusorna. Placerar man alla dessa trianglar med en katet längst x-axeln så att hypotenusan utgår ifrån origo så har trianglarna sina hörn på cirkeln med medelpunkt i origo och längden av den gemensamma hypotenusan som radie. Eftersom trianglarna har heltalssidor sammanfaller deras hörn med hörnen i rutnätet. Det återstår nu bara att bevisa att den första idén.*
*Skillnaden mellan två på varandra följande kvadrater är $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Alltså är alla udda tal skillnaden mellan två på varandra följande kvadrater. Det finns oändligt många udda kvadrater. Alltså har vi $a^2 = c^2 - b^2$ för oändligt många tripler. Detta svarar mot rätvinkliga trianglar på grund av Pythagoras sats. Inget par av dessa är likformiga eftersom kvoten mellan två av sidorna är $\frac{n}{n+1}$ för olika värden på n. Inga av dessa värden är identiska eftersom följden $a_n = \frac{n}{n+1}$ är växande. (Derivera t.ex.). Detta avslutar beviset.*

**Problem 13.** *Låt nu q vara det största tal så att $2^q \leq n$. Det finns inte något annat $k \leq n$ som är delbart med $2^q$, eftersom då hade vi haft $k = 2^q * m$ , där $m > 1$. Detta hade gett $k = 2^q * m > 2^q * 2 = 2^{q+1} > n$. Om $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = r$ där r är ett heltal och n>1 kan vi lösa ut $\frac{1}{2^q}$ och sedan multiplicera med den minsta gemensamma nämnaren (**least common multiple**) till de n första heltalen för att få:*

$$\frac{mgn(1,\ldots,n)}{2^q} = mgn(1,\ldots,n)\cdot\left(m - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2^q-1} - \frac{1}{2^q+1} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$$

*Den minsta gemensamma nämnaren är delbar med $2^q$ eftersom $2^q \leq n$, så $2^q$ är ett av talen den är en (gemensam) multipel av. Däremot är mgn inte delbar med $2^{q+1}$. Detta lämnas åt läsaren att bevisa. Vi kan nu dra slutsatsen att V.L. är udda, annars hade mgn varit delbar med $2^{q+1}$. Det följer av de fakta som har visats angående hur höga potenser av 2 som delar mgn och talen lägre än n att H.L. är jämnt. Vi använder oss också av att $n > 1$ så att mgn är jämn. Vi har vår motsägelse.*

**Problem 14.** *Drag **bisektrisen (the bisector)** till vinkeln $\gamma$. Kalla skärningspunkten mellan denna och sidan c för M. Låt också hörnen som står emot sidorna a,b,c kallas för A,B,C. Drag nu linjer från A och B vinkelrät mot bisektrisen. Kalla skärningspunkterna för $A'$ och $B'$. M delar c i två streckor, AM och BM, som är hypotenusor i de rätvinkliga trianglarna $BB'M$ och $AA'M$. Vi ser från figuren att $|AA'| = b \cdot sin(\frac{\gamma}{2})$ och $|BB'| = a \cdot sin(\frac{\gamma}{2})$. Eftersom dessa streckor är kateter i de tidigarenämna trianglarna, och hypotenusan alltid är längre än sina kateter, får vi $c = |AM| + |BM| \geq (a+b)\cdot sin(\frac{\gamma}{2})$.*

**Problem 15.** *Observera att alla termer i V.L. har en faktor med udda index och en faktor med jämnt index. Det är därför praktiskt att införa* $a = x_1 + x_3 + \dots$ *och* $b = x_2 + x_4 + \dots$. *Det är klart att V.L.* $\leq ab$ *, så vi måste bara visa att* $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$*, eftersom* $s = a + b$*. Detta kan man antingen göra genom att två gånger använda olikheten mellan aritmetiskt- och geometriskt medelvärde:* $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$*. Denna får man från att* $(a-b)^2 \geq 0$*. Alternativt kan man direkt skriva* $(a-b) = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab \geq 0$*.*
*En helt annan lösning vore att för ett godtyckligt fixt värde på* $s$ *visa olikheten genom optimering. Maximum nås då* $x_i = 0$ *för alla* $i$ *förutom tre. Detta visas med motsägelsebevis. Tankesättet är likt det i problem 7. Om det finns minns 4 nollskilda* $x_i$ *och* $x_1 \neq 0$*, så får vi en motsägelse ty* $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 \leq x_2 \cdot (x_3 + x_1) + (x_3 + x_1) \cdot x_4$*. Det lönar sig alltså att byta ut* $x_1$ *och* $x_3$ *mot* $0$ *och* $x_1 + x_3$*, vilket är tillåtet att göra eftersom summan bibehålls.*
*Har vi bara tre nollskilda* $x_i$ *så reduceras V.L. till* $x_2 \cdot (x_1 + x_3)$*. Vi kan anta att* $x_3 = 0$*, då detta inte ändrar något. Hela påståendet reduceras till* $x_1 \cdot x_2 \leq \frac{(x_1+x_2)^2}{4}$*, vilket vi redan har visat. Vi har också visat att likhet gäller om och endast om (**omm (iff)**)* $x_1 = x_2$*, men läsaren får fylla i detaljerna.*